

**Filipa Daniela Pereira Felizardo**

# **Modelo de Gestão de Compra de Aços para uma Empresa Metalomecânica**



**Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
setembro de 2013**

**Filipa Daniela Pereira Felizardo**

# **Modelo de Gestão de Compra de Aços para uma Empresa Metalomecânica**



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Matemática*

Orientadores: Prof. Doutora Maria do Carmo Guedes  
Engenheiro Jorge Oliveira

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
setembro de 2013

# Agradecimentos

*“KISSM – Keep It Simple Smart Mathematician”  
(Professor Carlos Miguel de Menezes)*

O primeiro agradecimento é obrigatoriamente aos meus pais e irmã. Apoiaram e disponibilizaram tudo o que foi necessário para que o meu sucesso dependesse apenas do meu esforço.

Agradeço à Professora Doutora Maria do Carmo Guedes e ao Engenheiro Jorge Oliveira pela orientação e dedicação nesta dissertação e estágio.

Agradeço aos colegas da F.Ramada que, desde o início, acolheram-me da melhor maneira possível, e ainda, à oportunidade que a empresa me proporcionou.

Não posso deixar de mencionar os docentes desta instituição pelo tempo despendido durante este projeto.

Agradeço aos amigos que me acompanharam e ajudaram durante este percurso académico.

Por último, agradeço ao Hugo Costa pelo apoio de sempre.

Muito obrigado a todos.



# Resumo

Atualmente, todas as empresas precisam estar aptas para responder às necessidades dos seus clientes. Infelizmente nem os capitais, nem os espaços para armazenar os artigos são infinitos. É necessário gerir os *stocks*, de maneira que a empresa satisfaça os seus clientes e, ao mesmo tempo, defenda os seus interesses.

No negócio do aço, a F.Ramada vende peças com dimensões personalizadas, aumentando a complexidade do problema de gestão de stocks.

Inicialmente, a empresa pretende saber quais os artigos que se devem comprar. Para agrupar as peças mais semelhantes e atribuir um artigo a cada grupo utiliza-se a análise classificatória.

Após saber quais os artigos indicados pretende-se descobrir a quantidade de cada artigo considerando a procura passada. O problema apresentado possui dois objetivos: minimizar os custos dos artigos e minimizar os desperdícios resultantes dos cortes. Devido a existência de mais do que um objetivo a minimizar, utiliza-se otimização multi-objetivos. De forma a considerar as incertezas das medidas, consideram-se os seus piores casos.

**Palavras-chave:** GESTÃO DE STOCKS, K-MÉDIAS, INCERTEZAS, PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE CORTE, OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVOS.



# Abstract

Nowadays, all firms need to be able to meet the needs of its customers. Unfortunately, neither the capital nor the space to store the items are endless. It is necessary to manage the stocks, so that the company satisfies its customers and, at same time, protect the interests of the business.

In the business of steel, F.Ramada sells pieces with custom dimensions, increasing the complexity of the inventory management problem.

Initially, the company plans to know which items it should buy. In order to group together the most similar pieces and assign each group an item is used the cluster analysis.

Once we know which items are indicated we intend to find out the amount of each item considering the demand in the past. The problem presented has two objectives: to minimize the items costs and the waste resulting from the cuts. Due to the existence of more than one objective to minimize, this study uses multi-objective optimization. In order to deal with the uncertainty of the measures we consider their worst cases.

**Keywords:** INVENTORY MANAGEMENT, K-MEANS, UNCERTAINTY, CUTTING OPTIMIZATION PROBLEM, MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION





# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Elementos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1 Técnicas de Agrupamento . . . . .	5
2.2 Gestão de <i>stocks</i> . . . . .	8
2.3 Otimização Multi-objetivo . . . . .	14
2.4 Problemas de Otimização de Cortes Tridimensionais . . . . .	16
<b>3 Aplicação ao problema da empresa</b>	<b>21</b>
3.1 Estudo dos Dados . . . . .	21
3.2 Aplicação Computacional . . . . .	24
<b>4 Conclusão</b>	<b>41</b>
<b>Referências</b>	<b>44</b>
<b>Anexos</b>	<b>i</b>
<b>A Problema resolvido em LINGO</b>	<b>iii</b>



# Lista de Tabelas

2.1	Notação utilizada no modelo de cortes, (Ozfirat, 2012) . . . . .	18
3.1	Medidas das peças vendidas em 2012 do Aço F10 . . . . .	24
3.2	Valores dos erros quadráticos para diferentes valores $k$ . . . . .	31
3.3	Medidas dos 31 artigos sugeridos pelo K-Médias . . . . .	32
3.4	Encomendas médias, desvios padrão e procuras no mês de junho de 2012	34
3.5	Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias menos o desvio padrão . . . . .	37
3.6	Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias	37
3.7	Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias mais o desvio padrão . . . . .	38
A.1	Output do LINGO do problema bi-objetivos com peso dos cortes igual a 0.9	v



# Lista de Figuras

2.1	Esquema do algoritmo K-Médias . . . . .	7
2.2	Política do nível de encomenda (esquerda) e Política de revisão cíclica (direita) . . . . .	9
2.3	Caminho aleatório da procura . . . . .	10
2.4	Impacto do custo de posse sobre o desempenho (imagem retirada de Bertsimas and Thiele (2006)) . . . . .	13
2.5	Corte de blocos em planos (esquerda) e corte de planos no produto final (direita), imagens retiradas de Ozfirat (2012). . . . .	17
2.6	Exemplo de um padrão de corte de um bloco (esquerda) e de um plano (direita), imagens retiradas de Ozfirat (2012). . . . .	19
3.1	Quantidade, número de compras e peso dos clientes F10 . . . . .	21
3.2	Histograma da espessura das peças vendidas em 2012 do Aço F10 . . . . .	22
3.3	Histograma da largura das peças vendidas em 2012 do Aço F10 . . . . .	23
3.4	Histograma da comprimento das peças vendidas em 2012 do Aço F10 . . . . .	23
3.5	Possíveis posições ao longo do comprimento, largura e espessura . . . . .	25
3.6	Peças agrupadas em 22 grupos . . . . .	27
3.7	Peças agrupadas em 23 grupos . . . . .	28
3.8	Número de agrupamentos vs Soma dos Erros Quadráticos . . . . .	29
3.9	Peças agrupadas em 10 grupos . . . . .	30
3.10	Soma dos Erros Quadráticos repetindo o algoritmo 20 vezes . . . . .	30
3.11	Peças agrupadas em 31 grupos . . . . .	31



# Capítulo 1

## Introdução

Os *stocks* (inventários) são bens ou materiais que as empresas mantêm com a finalidade de revenda.

De modo a servir as necessidades dos seus clientes as empresas devem garantir que existam *stocks* que as satisfaçam, pois o tempo de produção ou de abastecimento pode não ser semelhante ao tempo de procura dos bens. Como seria incomportável para as empresas guardarem inventários demasiados elevados é necessário existir uma gestão de *stocks* de maneira a não empatarem capitais que poderiam ser investidos com outras finalidades.

O importante é encontrar o equilíbrio entre as decisões que levam à acumulação de grandes *stocks*, tendo elevados custos de posse, e as decisões que levam frequentemente a rotura de inventários, prestando um mau serviço aos clientes e uma redução de vendas. Os custos relacionados com a gestão de *stocks* são os seguintes:

- Custo de aquisição, isto é, o custo de unidades compradas. É vulgar o custo unitário do artigo não variar consoante o tamanho da encomenda, no entanto existem fornecedores que diminuem o preço de aquisição com o aumento da quantidade encomendada (descontos de quantidade).
- Custos de encomenda são suportados pelo sistema de gestão de inventários que podem resultar de vários fatores e variar de um sistema para outro (por exemplo custos administrativos). Estes custos, que não dependem da quantidade encomendada são custos fixos.
- Custos de posse do inventário, incluem os custos monetários diretos (seguros, impostos, quebras, roubos, renda do armazém e custos de funcionamento do armazém). A parcela mais importante é o custo de oportunidade que não aparece no balanço contabilístico. Este é o custo que resulta de ter o capital investido em inventário, deixando passar oportunidades de investimento com maior rentabilidade. Outro custo incluído no custo de posse é o custo de obsolescência. Este é o custo por unidade que deve ser eliminado por o bem se ter tornado obsoleto.

- Custos de rotura são difíceis de estimar pois para além dos custos diretos resultantes da compra de artigos mais caros para satisfazer o cliente, estão normalmente associados custos indiretos relacionados com a imagem comercial da empresa como a perda de clientes.

A F.Ramada é a empresa líder de mercado nacional em todas as áreas onde desenvolve atividade - Aços Especiais (comercial), Arco de Aço Laminado a Frio, Aço Estirado a Frio, Sistemas de Armazenagem e Ferramentas para Madeira. Entre as cinco atividades os Aços Especiais é a atividade dominante, sobre a qual a empresa possui elevado conhecimento e experiência.

Para garantir a satisfação dos seus clientes, juntamente com a competitividade com outras empresas do mercado, a F.Ramada tem que gerir as peças em *stock* no armazém.

A F.Ramada encomenda, mensalmente, barras de aço com dimensões distintas. Os *stocks* destes artigos são contabilizados em peso (Kg), em vez de unidades. Inicialmente, essas barras são consideradas artigos *standard*, pois as suas medidas coincidem com as dimensões que estão registadas no *software* utilizado pela empresa. As barras são cortadas de modo a satisfazer uma encomenda colocada, obtendo a peça que o cliente encomendou.

Após os cortes, obtêm-se três sobras no máximo. Essas sobras podem ser colocadas no *stock* do artigo, caso a largura e espessura não sejam alteradas, no *stock* das peças com medidas irregulares (MI) da família de aço em questão ou serem consideradas sucata. O conceito de sucata criou-se devido à necessidade de escoar os artigos de pequenas dimensões ou peso.

O objetivo deste estudo é saber quais e quantos artigos se deve encomendar ao fornecedor.

Com a criação de demasiados MIs foi necessário perceber se a empresa encomenda os artigos mais adequados às suas vendas. Pretende-se descobrir quais as dimensões dos artigos mais adequadas para ter em *stock*. Na resolução deste problema inicial começa-se por agrupar as peças vendidas em junho de 2012, de modo a encontrar para cada grupo, um artigo que satisfaça essas encomendas.

O método K-Médias é o algoritmo escolhido para essa análise. Nesta fase do estudo é utilizado o *software* R Core Team (2012). Este *software* é uma linguagem e um ambiente de desenvolvimento integrado, para cálculos estatísticos e gráficos.

Após conhecidos os artigos ajustados às vendas existentes, é preciso quantificar cada um desses artigos para encomendar ao fornecedor da F.Ramada. Para saber quantos artigos se deve encomendar utiliza-se otimização multi-objetivo. Assim, consegue-se otimizar os desperdícios dos blocos (barras) de aço e ainda o preço total da encomenda colocada. O problema de otimização apresentado em Ozfirat (2012) pertence ao problema de otimização bi-objetivo em estudo.



Bertsimas and Thiele (2006) consideram as incertezas da procura ao longo do tempo para realizar a gestão dos *stocks* de uma instalação. Aproveita-se a ideia da incerteza de um parâmetro, as medidas das peças, e consideram-se os seus piores casos.

Para a resolução dos problemas de otimização apresentados na dissertação foi utilizado o Solver do Microsoft Excel 15.0. Apesar de existirem outras ferramentas de otimização, mais intuitivas e velozes na resolução dos problemas, essas não são, em geral, do domínio público.

Depois de introduzido o problema para estudo, o segundo capítulo refere-se aos elementos teóricos necessários para a resolução do problema prático. A metodologia utilizada para o estudo desses conceitos e métodos foi a pesquisa bibliográfica e conhecimentos académicos.

No terceiro capítulo é efetuado um estudo dos dados. Seguidamente, coloca-se em prática os conhecimentos teóricos adquiridos, de maneira a resolver os problemas anteriormente descritos.

Por último retiram-se as conclusões do estudo, acrescentam-se as simplificações que ambos os problemas acarretam e ainda as contradições com o caso prático.



# Capítulo 2

## Elementos Teóricos

Ao longo deste estudo foram utilizados diferentes conhecimentos. Assim, neste capítulo introduzo alguns conceitos e temas necessários para a compreensão e resolução do problema prático.

### 2.1 Técnicas de Agrupamento

Inicialmente pretende-se realizar uma análise que ajude a empresa a decidir quais os artigos que deve encomendar ao fornecedor. Para tal, utiliza-se uma metodologia que agrupa as peças vendidas de acordo com as semelhanças entre elas.

Esse estudo é desenvolvido através da análise classificatória, não supervisionada, isto é, as classes são desconhecidas, a análise parte dos dados. Esta análise, apenas com a informação retirada dos dados em estudo, determina como agrupar esses dados. Essa agregação tem como objetivo agrupar as peças de forma a que as características entre as peças do grupo sejam bastante semelhantes e as características entre os diferentes grupos sejam díspares. O problema deste tipo de análise consiste em saber quantos e quais os diferentes agrupamentos a considerar. Como acontecimentos extremos, temos o caso em que todas as peças são consideradas apenas um agrupamento e o caso onde cada peça é considerada um agrupamento, obtendo o número de agrupamentos igual ao número de observações.

Existem dois grandes grupos de métodos na Análise Classificatórios: Métodos Hierárquicos e Métodos Não-Hierárquicos.

Nos Métodos Hierárquicos o agrupamento em classes realiza-se em etapas. Inicialmente cada observação é um agrupamento e em cada etapa dois agrupamentos são agregados, até todas as observações estarem agrupadas num único agrupamento.

Nos Métodos Não-Hierárquicos, usualmente, fixa-se à partida o número de agrupamen-

tos em que os dados se irão repartir e dividem-se as observações pelos diferentes agrupamentos. Prossegue-se com mudanças dos indivíduos de uma classe para a outra até obter uma boa classificação, isto é, até tornar as classes mais internamente homogêneas e externamente heterogêneas.

No estudo em questão utiliza-se um dos algoritmos mais conhecido dos Métodos Não-Hierárquicos, Método K-Médias (K-Means). O K-Médias é um método iterativo que dado um número  $k$  de classes, agrupa, de forma iterativa, todas as observações em  $k$  agrupamentos. A função de classificação é a distância de cada observação aos diferentes centros do grupo (centroides). Este método tem como objetivo minimizar a soma entre a distância, seja ela qual for, entre todas as observações e o centro do seu grupo, segundo o critério dos mínimos quadrados. No nosso estudo utiliza-se a distância euclidiana.

De seguida é apresentado o algoritmo K-Médias:

- 1 Escolher  $k$  centroides distintos, aleatoriamente;
- 2 Associar cada observação ao centroide mais próximo;
- 3 Recalcular o centro de cada grupo, através da média dos objectos de cada classe;
- 4 Repetir 2 e 3 até não existirem alterações.

O esquema da figura 2.1 mostra como funciona este algoritmo. Consideram-se dois agrupamentos. Note-se que este exemplo, devido a sua simplicidade, fica resolvido com apenas uma iteração. O algoritmo resultou numa boa solução, visto que, os dados são grupos compactos e bem separados uns dos outros, o que nem sempre acontece. Como todos os algoritmos, o K-Médias tem vantagens e desvantagens. Algumas vantagens:

- Eficiente em tratar grandes conjuntos de dados;
- Fácil implementação;
- Rápida convergência;
- Termina num ótimo local.

Algumas desvantagens:

- Determinação *a priori* do número de agrupamentos;
- Não descobre agrupamentos de forma não-convexa;
- Todas as observações são forçadas a pertencer a um agrupamento;
- Todos os agrupamentos tem de possuir pelo menos uma observação;

- Trabalha apenas com dados numéricos;
- Nem sempre gera a solução ótima, pois depende dos centros iniciais;
- Tem sensibilidade aos *outliers*.

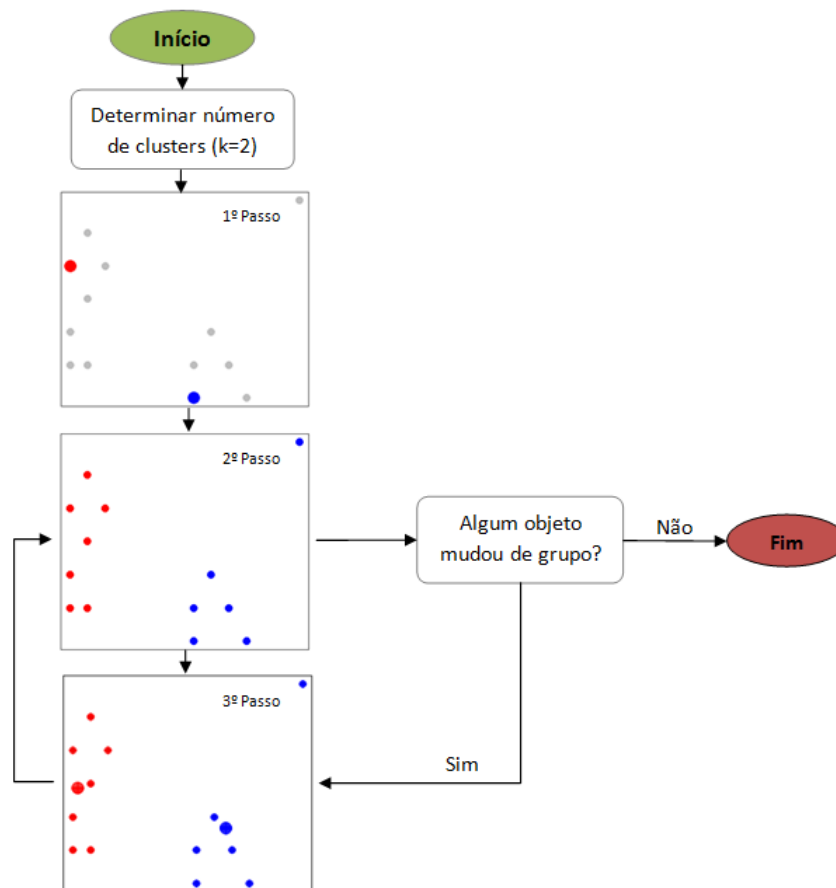


Figura 2.1: Esquema do algoritmo K-Médias

Para contornar a desvantagem do algoritmo só funcionar se se conhecer *a priori* o número de agrupamentos foi necessário criar índices comparativos que aconselhassem qual o melhor número de agrupamentos a utilizar. Existem dois tipos de critérios que podem ajudar nesta decisão: critérios internos e critérios externos. Os critérios externos (Rand Index Ajustado, Jaccard, ...) avaliam o grau de correspondência entre a estrutura dos grupos, encontrados através da análise de agrupamentos, e a informação conhecida *a priori* de uma solução de agrupamento esperada ou conhecida. Os critérios internos (Silhueta, Davies-bouldin, Calinski, ...) avaliam o grau de compatibilidade da estrutura encontrada utilizando apenas a informação dos próprios dados. Existem ainda autores que defendem a existência de um terceiro grupo de critérios, os critérios relativos (Índice de Dunn, PBM, ...). Estes critérios comparam duas ou mais soluções da análise de

agrupamento com a finalidade de reconhecer uma das estruturas de grupos como a melhor estrutura, sob algum aspeto. Normalmente são critérios internos que possuem a capacidade de quantificar a qualidade dos agrupamentos.

Um estudo comparativo entre vários índices, (Guerra et al., 2012) concluiu que o índice de Calinski obtém bons resultados quando os dados experimentais possuem 5, e também, 10 por cento de *outliers*.

Assim, neste estudo vai-se utilizar o índice de Calinski para comparar os resultados com diferentes números de agrupamentos. Este índice tem como objetivo encontrar agrupamentos homogêneos dentro de cada grupo e heterogêneos entre grupos. Este índice baseia-se numa medida de separação, Soma dos Erros Quadráticos entre grupos (BSS) e coesão, Soma dos Erros Quadráticos intra grupos (WSS):

$$CH_k = \frac{BSS_k(n - k)}{WSS_k(k - 1)} \quad (2.1)$$

onde  $n$  é o número total de observações e  $k$  o número de agrupamentos. O objetivo é encontrar o valor que maximiza este índice.

## 2.2 Gestão de *stocks*

Existem diversos métodos/modelos para a resolução de problemas de gestão de inventários. Tavares et al. (1996) apresentam os mais simples: os modelos determinísticos e os modelos probabilísticos. Como o próprio nome sugere, os modelos determinísticos admitem que a procura ao longo do tempo é praticamente constante, enquanto os probabilísticos consideram que existem flutuações aleatórias na procura e/ou no tempo de reposição.

Dentro dos modelos probabilísticos a gestão de *stocks* apresenta-se sob a forma de duas políticas:

- Política do nível de encomenda - uma encomenda de valor fixo é colocada sempre que o inventário desce até uma quantidade predefinida, denominado como ponto de encomenda;
- Política de revisão cíclica – as encomendas são colocadas em períodos de tempo fixos variando a quantidade a encomendar. É necessário que a soma da quantidade encomendada e do *stock*-em-mão alcance um certo valor, denominado como ponto de pedido.

Existem vários modelos que têm em conta a estrutura de cada empresa e relação com o seu fornecedor. Como exemplo, enuncia-se a possibilidade de existir rotura de *stock*,

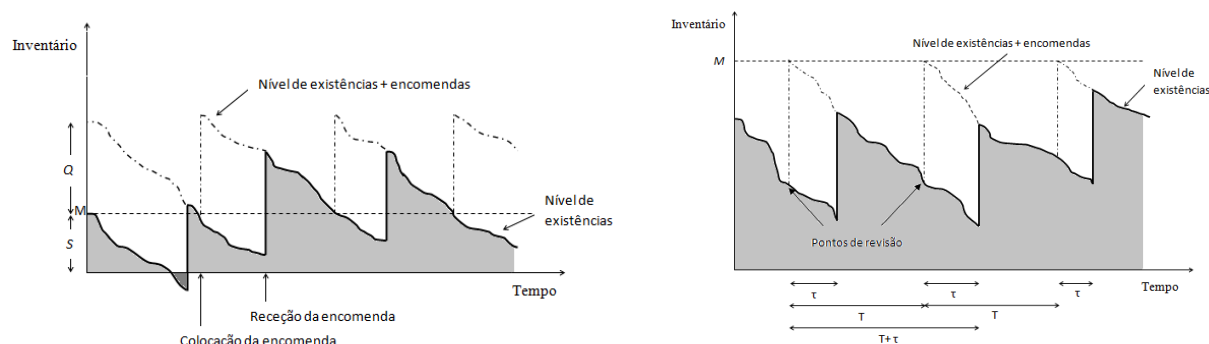


Figura 2.2: Política do nível de encomenda (esquerda) e Política de revisão cíclica (direita)

ou então, a reposição de *stock* ser instantânea. O melhor modelo é o que se adequa da melhor maneira às características da empresa.

Apesar da finalidade destes modelos ser otimizar os custos, nem sempre encontram o valor mais económico. Por exemplo, se existir um bem com uma procura bastante irregular mas previsível, a utilização da política de revisão cíclica será praticamente diária, o que por vezes não é a melhor solução, podendo utilizar-se outra técnica, a programação dinâmica.

A grande dificuldade da gestão de *stocks* é conhecer a quantidade necessária a ter em *stock* num determinado período de tempo, ou seja, a incerteza da procura. Assim, alguns autores como, Soyester, Ben-Tal e Nemirovsky, criaram formulações para o problema robusto. A otimização robusta tem como objetivo minimizar a variância da função objetivo, isto é, na presença de alterações aleatórias nas variáveis e, ou parâmetros do problema, a alteração na solução ótima é pouco significativa.

Bertsimas and Thiele (2006) utilizaram a otimização robusta para formularem um problema de inventário numa ou em várias instalações. Realizaram também um estudo comparativo entre as soluções encontradas pela otimização robusta e pela programação dinâmica.

Inicialmente, os autores enunciam um problema linear com incertezas:

$$\text{minimizar} \quad \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (2.2)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

onde apenas existe incerteza em  $\mathbf{A}$ . Modelar-se  $\mathbf{A}$  de modo que cada coeficiente  $a_{ij}$  pertence ao intervalo centrado no seu valor nominal  $\bar{a}_{ij}$  e metade do seu comprimento  $\hat{a}_{ij}$ .

É de salientar que o seu valor exato é desconhecido. No caso do problema de gestão de *stocks* a matriz  $\mathbf{A}$  refere-se às procura incertas em cada período de tempo.

Define-se o desvio escalonado do parâmetro  $a_{ij}$  como

$$z_{ij} = \frac{a_{ij} - \bar{a}_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$$

que pertence ao intervalo  $[-1, 1]$ . Coloca-se a condição do somatório de todos os desvios escalonados dos parâmetros  $a_{ij}$  ter de ser inferior a um limite  $\Gamma$ . Consideram-se as situações extremas: quando  $\Gamma = 0$ , obtém-se o caso em que os valores incertos são iguais aos seus valores nominais; quando  $\Gamma = |J|$ , obtém-se o pior caso. A figura seguinte mostra a incerteza da procura, e ainda, como são escassos os valores onde a procura atinge os casos extremos.

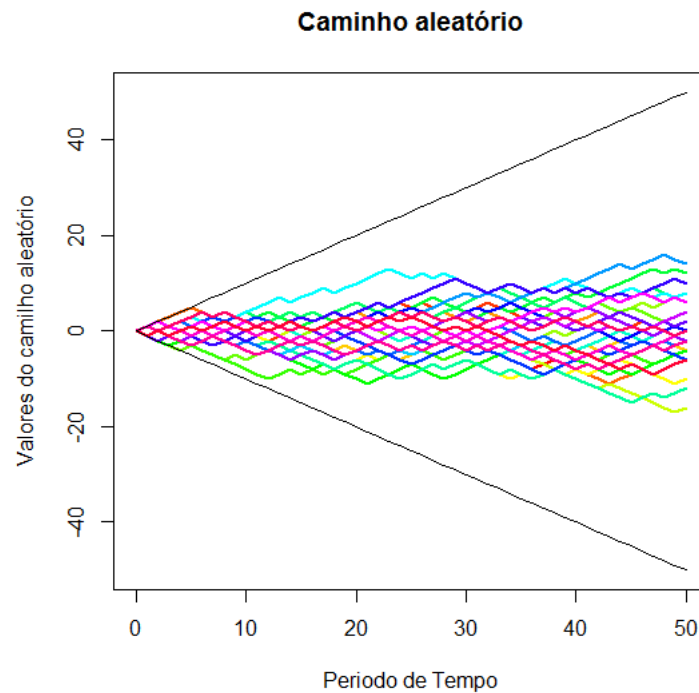


Figura 2.3: Caminho aleatório da procura

Como se pretende encontrar um certo equilíbrio entre desempenho e robustez, o valor de  $\Gamma$  deve estar entre 0 e  $|J|$ .

**Teorema 1** *Em Bertsimas and Sim (2003)*



O PPL incerto tem a seguinte forma linear robusta:

$$\text{minimizar} \quad \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (2.5)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_j \bar{a}_{ij}x_j + q_i\Gamma + \sum_{j:(i,j) \in J} r_{ij} \leq b_i \quad \forall i, \quad (2.6)$$

$$q_i + r_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_i \quad \forall (i,j) \in J \quad (2.7)$$

$$-\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

$$\mathbf{q} \geq 0, \mathbf{r} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0. \quad (2.9)$$

A contraparte robusta é da mesma classe que o problema nominal, isto é, um problema linear. É uma característica bastante atrativa pois é facilmente tratável com qualquer *software* com ferramentas usuais de otimização. Caso algumas variáveis do problema nominal fossem inteiras significava que na contraparte robusta as características dessas variáveis se manteriam inteiras.

Considere-se o problema de gestão de *stocks* numa única instalação, onde se pode encomendar apenas um tipo de bem e a procura é estocástica sobre um horizonte finito, discreto, de  $T$  períodos. O objetivo deste problema de otimização é minimizar os custos. Defina-se para  $k = 0, \dots, T$ :

- $x_k$  - *stock* disponível no início do período  $k$ ;
- $u_k$  - *stock* encomendado no início do período  $k$ ;
- $w_k$  - procura durante o período  $k$ .

Considera-se que o tempo de reposição de uma encomenda é 0, o *stock* encomendado no início do período  $k$  chega antes do período  $k + 1$ , e ainda, que o excesso da procura é mantido em carteira, ou seja, a procura é satisfeita quando existir *stock*-em-mão. Não se consideram limites à quantidade a encomendar ou à quantidade possível de armazenar pela empresa.

A evolução do *stock* ao longo do tempo é descrita pela seguinte equação linear:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k, \quad k = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (2.10)$$

que conduz à expressão:

$$x_{k+1} = x_0 + \sum_{i=0}^k (u_i - w_i), \quad k = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (2.11)$$

As procuras  $w_k$  são variáveis aleatórias. Modela-se  $w_k$  para cada  $k$  como um parâmetro incerto que toma valores em  $[\bar{w}_k - \hat{w}_k, \bar{w}_k + \hat{w}_k]$  e

$$z_k = \frac{w_k - \bar{w}_k}{\hat{w}_k}$$

são os desvios escalonados do parâmetro  $w_k$ , com valores entre  $-1$  e  $1$ . A soma dos desvios escalonados do parâmetro  $w_k$  é delimitada superiormente por um valor positivo  $\Gamma_k$ .

Um dos principais pressupostos que se faz em relação ao  $\Gamma_k$  é que aumenta à medida que o  $k$  aumenta, isto significa que à medida que o tempo aumenta a incerteza também vai aumentar. No caso prático da colocação de uma encomenda, uma empresa sente maior incerteza ao encomendar para mais períodos de tempo do que para poucos períodos de tempo. Também se impõe que o  $\Gamma_k$  aumente, no máximo, uma unidade em cada período de tempo.

De seguida descreve-se a função custo incorrido no período  $k$ . É composta por duas partes: custo de encomenda,  $C(u_k)$ , e custo de posse/escassez,  $R(x_k + u_k - w_k)$ , sendo este custo calculado no fim de cada período, depois do pagamento da encomenda  $u_k$  ser recebido e a procura  $w_k$  ter sido realizada.

O custo de encomenda formula-se do seguinte modo:

$$C(u) = \begin{cases} K + c.u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $c > 0$  (custo unitário) e  $K \geq 0$ . Se  $K > 0$  então a encomenda tem associado um custo fixo, caso  $K = 0$  a encomenda não acarreta nenhum valor monetário extra ao custo das unidades compradas. Como referido anteriormente, o custo de posse é preço de uma peça ficar guardada em *stock* (excesso de *stock*) e o custo de escassez é o preço que a empresa tem por não satisfazer a procura de um bem por um cliente (rotura de *stock*). O custo de posse/escassez representa-se da seguinte maneira:

$$R(x) = \max(hx, -px) \quad (2.13)$$

onde  $h$  e  $p$  são não negativos. Assume-se que  $p > c$ . Após manipulação das expressões obtem-se a seguinte formulação robusta do problema de inventários de uma única instalação:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{k=0}^{T-1} (cu_k + Kv_k + y_k) \quad (2.14)$$

$$\text{sujeito a} \quad y_k \geq h(x_0 + \sum_{i=0}^k (u_i - \bar{w}_i) + q_k \Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik}) \quad \forall k \quad (2.15)$$

$$y_k \geq -p(x_0 + \sum_{i=0}^k (u_i - \bar{w}_i) + q_k \Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik}) \quad \forall k \quad (2.16)$$

$$q_k + r_{ij} \geq \hat{w}_i \quad \forall k, \forall i \leq k \quad (2.17)$$

$$q_k \geq 0, r_{ij} \geq 0 \quad \forall k, \forall i \leq k \quad (2.18)$$

$$0 \leq u_k \leq Mv_k, \quad v_k \in \{1, 0\} \quad \forall k, \quad (2.19)$$

onde  $M$  é um número positivo grande.

$q_k$  e  $r_{ik}$  quantificam a sensibilidade nas alterações nos parâmetros incertos e  $q_k\Gamma_k + \sum_{i=0}^k r_{ik}$  é o caso do pior desvio entre a procura acumulada e o seu valor nominal.

Quando  $K = 0$  o problema robusto é um problema de programação linear, quando  $K > 0$ , ou seja, existe um custo fixo associado a cada encomenda, o problema robusto é um problema de programação mista. Isto significa que qualquer uma destas hipóteses é facilmente tratável num *software* de otimização com ferramentas *standard*.

Existem formulações um pouco mais realistas, como a formulação de modelos com limites de quantidade a encomendar e a armazenar, a formulação para a gestão de *stocks* com várias instalações, entre outras.

Bertsimas and Thiele (2006) chegam à conclusão que a abordagem robusta origina soluções de alta qualidade e frequentemente tem melhor desempenho do que a programação dinâmica.

Para problemas de uma única instalação, a abordagem robusta supera a programação dinâmica quando, por exemplo, o custo de posse está acima de um determinado limiar e é superado pela programação dinâmica, caso contrário. Esta conclusão é válida tanto para diferentes distribuições assumidas e realizadas como para outros parâmetros.

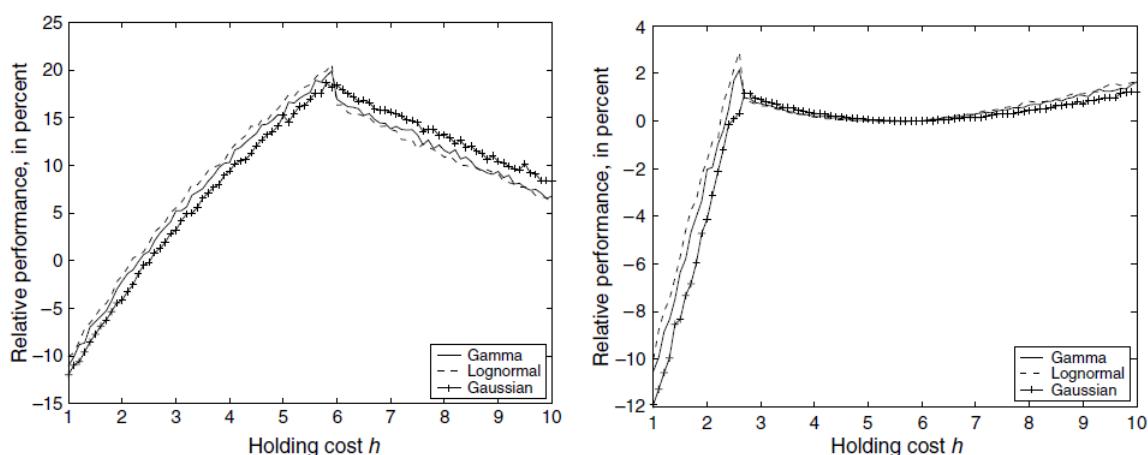


Figura 2.4: Impacto do custo de posse sobre o desempenho (imagem retirada de Bertsimas and Thiele (2006))

Quando a distribuição assumida é binomial (figura 2.4, lado esquerdo) e a distribuição assumida é gaussiana (figura 2.4, lado direito) a programação dinâmica supera a abordagem robusta até ao custo de posse de cerca de 2,5 unidades monetárias e é superada

em todos os seguintes valores estudados. Os valores do eixo perpendicular da figura 2.4 foram calculados com a expressão  $R = 100 \times \frac{E(DP) - E(ROB)}{E(DP)}$ , que representa o desempenho relativo da abordagem robusta,  $E(ROB)$ , comparada com a abordagem dinâmica,  $E(DP)$ , medida em percentagem.

Enquanto a formulação robusta de Soyster atribui a cada parâmetro incerto o valor do seu pior caso, Ben-Tal e Nemirovsky encontram um equilíbrio entre a robustez e o desempenho do problema. A desvantagem dessa formulação era a sua intratabilidade computacional.

Bertsimas and Thiele (2006) conseguiram formular um problema robusto que não fosse conservador e computacionalmente tratável.

## 2.3 Otimização Multi-objetivo

O problema de otimização apresentado anteriormente tem uma única função objetivo. Quando existe mais que uma finalidade num problema é usual utilizar várias funções objetivo. Esses interesses podem estar inter-relacionados (lucros, custos, investimentos, etc.) ou tratar-se de questões distintas (risco, poluição, etc.).

Fala-se em decisão em critérios múltiplos (*multi-criteria-decision making* - MCDM) sempre que existem múltiplos interesses, ou seja, restrições ou objetivos. Este ramo da otimização subdivide-se em dois grupos:

- Tomada de decisão com atributos múltiplos (*Multi-attribute decision making* - MADM), o analista tem de escolher entre um número finito de soluções existentes;
- Programação (linear) com objetivos múltiplos (*Multi-objective (linear) programming* - MO(LP), problema de otimização que inclui vários objetivos.

Apenas o último ponto é descrito em Eiselt and Sandblom (2007).

A otimização multi-objetivo consiste na obtenção de um vetor de variáveis de decisão que satisfaça as restrições e otimize uma função constituída por diversos termos ou funções objetivo. Formalmente, um problema de otimização multi-objetivo pode ser formulado como:

$$\text{minimizar} \quad z = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (2.20)$$

$$\text{sujeito a} \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), \dots, g_r(x)) \leq b \quad (2.21)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in X \quad (2.22)$$

$$z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_r) \in Z \quad (2.23)$$

onde  $x$  é o vetor de decisão,  $n$  o número de objetivos,  $z$  o vetor objetivo,  $X$  o espaço de decisões e  $Z$  o espaço objetivo. O conjunto de restrições é dado por  $g(x) \leq b$ .

Contrariamente ao que acontece aos problemas de otimização de um único objetivo, num problema de otimização multi-objetivo, quando são considerados objetivos conflituosos, em geral, não existe uma única solução que seja ótima simultaneamente para todos os objetivos. Existe assim um conjunto de alternativas conhecidas como soluções ótimas de Pareto, soluções eficientes ou conjunto admissível do problema.

Um vetor solução  $z$  é ótimo de Pareto se não existe um outro vetor viável  $z^*$  que possa melhorar algum objetivo sem piorar, pelo menos, um outro objetivo.

Considerando a formulação do problema de multi-objetivo, tem-se que:

- $z$  domina  $z^*$  se, e somente se,  $z_j \leq z_j^* \quad \forall j$  e  $z_j < z_j^*$  para algum  $j$ ;
- $z$  e  $z^*$  são indiferentes ou possuem o mesmo grau de dominância se, e somente se,  $z$  não domina  $z^*$  e vice-versa, não sendo possível identificar qual a melhor solução, a menos que exista a informação sobre a preferência dos objetivos.

O conjunto ótimo de Pareto é formado pelo conjunto de todas as soluções não dominadas, dentro das soluções fatíveis, e a fronteira de Pareto é formada pelos pontos no espaço objetivo que corresponde ao conjunto ótimo de Pareto.

Em alguns casos, as funções objetivo podem ser otimizadas separadamente ganhando algum tempo computacional, mas nem sempre as soluções são satisfatórias para um, ou mais, dos outros objetivos. Deste modo, é necessário fazer um ajuste.

Existem vários métodos para resolver os problemas de otimização multi-objetivo, por exemplo o Método da Constante e o Método do Peso. Ambos utilizam informação, do analista, sobre a relação entre objetivos e a escolha de expressar um critério como um objetivo ou como uma restrição. De seguida apresenta-se apenas o Método do Peso.

Quando o analista consegue especificar qual a relação/importância que cada objetivo toma é possível aplicar o Método do Peso, sugerido por Zadeh em 1963.

A ideia deste método é simples: transformar um problema de otimização multi-objetivo num problema de objetivo único. A função objetivo, através deste método, é a soma dos produtos dos objetivos individuais  $\text{Min } f_1(x) = c_1x$ ,  $\text{Min } f_2(x) = c_2x$ ,  $\text{Min } f_r(x) = c_rx \dots$  pelos pesos não negativos  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Formalmente, representa-se da seguinte forma:

$$\text{miniizar} \quad \sum_{i=1}^n w_i f_i(x) \quad (2.24)$$

$$w_i > 0 \quad (2.25)$$

$$x \in X \quad (2.26)$$

onde  $X$  representa o espaço de decisões. A finalidade deste método é realizar várias otimizações com diferentes pesos dos objetivos individuais.

Se o analista tiver uma noção quase certa dos pesos a escolher então a resposta dada pelo método será a resposta desejada pela combinação dos objetivos. Mesmo assim, é necessário realizar uma análise de sensibilidade para o analista ter a informação do que poderá acontecer com pequenas perturbações.

Caso o analista não tenha qualquer ideia dos pesos que os objetivos devem tomar, deve analisar inicialmente os objetivos com peso igual a um, separadamente. Isto é, os vetores de pesos  $w = [1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], [0, 0, \dots, 1]$  são utilizados em  $n$  problemas de otimização de objetivo único.

Os pesos podem ter duas funções no Método do Peso:

- expressar a importância relativa entre diferentes objetivos (existem autores que definem que a soma dos pesos tem de ser igual a 1);
- providenciar um meio de conversão de unidades entre diferentes objetivos (que por vezes é incalculável) .

## 2.4 Problemas de Otimização de Cortes Tridimensionais

Como qualquer empresa de aço que vende peças com medidas personalizadas, a F.Ramada deseja otimizar os cortes sobre os artigos em *stock*, ou seja, a empresa tem como um dos objetivos otimizar os cortes de maneira a não existirem demasiados desperdícios.

É bastante acessível encontrar vários problemas de otimização de corte para problemas unidimensionais e bidimensionais, ao contrário do que acontece com problemas tridimensionais.

Ozfirat (2012), publicou dois possíveis problemas de corte em três dimensões. Trata-se de uma fábrica de mármore que corta os seus blocos de mármore em pequenas peças para satisfazer a procura dos seus clientes. As medidas de cada peça são representadas pela sua espessura, largura e comprimento em centímetros.

O processo de corte é descrito de seguida:

- 1º Passo – cortam-se os blocos pela espessura, resultando nos planos;
- 2º Passo – cortam-se os planos (largura e comprimento), resultando no produto final.

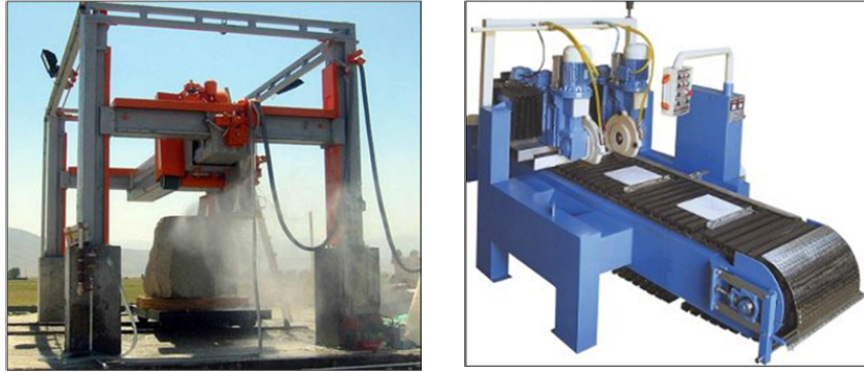


Figura 2.5: Corte de blocos em planos (esquerda) e corte de planos no produto final (direita), imagens retiradas de Ozfirat (2012).

O autor sugeriu duas abordagens ao problema. A primeira é resolver estes dois passos separadamente, isto é, encontrar a solução ótima para o corte dos planos e de seguida encontrar a solução ótima para o corte dos blocos tendo em consideração os planos necessários para satisfazer a procura dos produtos finais.

A outra é resolver estes dois passos em simultâneo. Exponho este segundo problema que Ozfirat (2012) apresentou. O modelo é o seguinte:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1,\dots,N} \text{DesperdicioB}_i \text{Bloco}_i + \sum_{j=1,\dots,M} \text{DesperdicioP}_j \text{Plano}_j \quad (2.27)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1,\dots,J} \text{PadraoP}_{jf} \text{Plano}_j \geq \text{Procura}_f \quad \forall f = 1,\dots,F \quad (2.28)$$

$$\sum_{j=1,\dots,J} \text{EspessuraP}_{jk} \leq \sum_{i=1,\dots,I} \text{PadraoB}_{ik} \text{Bloco}_i \quad \forall k = 1,\dots,K \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=1,\dots,I} \text{Bloco}_i \leq \text{numB} \quad (2.30)$$

$$\text{Bloco}_i \in \{0,1\}, \text{Plano}_j \in \{0,1,2,3,\dots\} \quad \forall i = 1,\dots,I, \quad \forall j = \dots,J \quad (2.31)$$

Na tabela 2.1 encontram-se descritos todos os parâmetros, variáveis e conjuntos do problema anterior.

A função objetivo representa o desperdício total de mármore e a primeira restrição garante que a procura é satisfeita. A segunda garante que o número de planos cortados, para satisfazer a procura, não excede os planos cortados a partir dos blocos. E por último, a restrição que limita os blocos ao número disponível.

Tabela 2.1: Notação utilizada no modelo de cortes, (Ozfirat, 2012)

<b>Conjuntos:</b>	
$F$	número de produtos finais
$J$	número de diferentes padrões de corte de planos
$I$	número de diferentes padrões de corte de blocos de mármore
$K$	número de diferentes espessuras dos produtos finais
<b>Parâmetros:</b>	
Procura $_f$	procura do produto $f$ , $f : 1, \dots, F$
PadraoP $_{jf}$	número de vezes que o produto $f$ pode ser cortados do bloco de mármore no padrão $j$ , $j : 1, \dots, J$ , $f : 1, \dots, F$
PadraoB $_{jk}$	número de vezes que o plano de dimensão $k$ pode ser cortado do bloco de mármore no padrão $i$ , $i : 1, \dots, I$ , $k : 1, \dots, K$
DesperdicioP $_j$	desperdício do plano de mármore quando se efetua o corte do padrão $j$ , $j : 1, \dots, J$
DesperdicioB $_i$	desperdício do bloco de mármore quando se efetua o corte do padrão $i$ , $i : 1, \dots, I$
numB	número de blocos disponíveis
EspessuraP $_{jk}$	toma valor 1 se a espessura do padrão do plano $j$ for igual ao de espessura $k$ , 0 caso contrário
<b>Variáveis de decisão:</b>	
Plano $_j$	número de planos cortados quando se realiza o corte do padrão $j$ , $j : 1, \dots, J$
Bloco $_i$	toma valor 1 se é selecionado para ser cortado do bloco de mármore, e 0 caso contrário

O autor após realizar as experiências computacionais para 44 encomendas diferentes, calculou o desperdício de mármore através da seguinte expressão:

$$\text{TotalMarbleSpolage} = \frac{\text{TotalVolumeofMarbleWasted}(m^3)}{\text{TotalVolumeofblocksUsed}(m^3)} \times 100 \quad (2.32)$$

Em média, a percentagem de desperdício de mármore no modelo de duas fases foi de 4,53%, enquanto no modelo de apenas uma fase foi de 2,95%. Nenhuma das 44



comparações beneficiou o modelo de duas fases. O artigo conclui que com 99% de confiança estas duas abordagens são significativamente diferentes, isto é, o modelo integrado tem um melhor desempenho que o modelo de duas fases e por isso é o recomendado às fábricas de mármore estudadas no artigo.

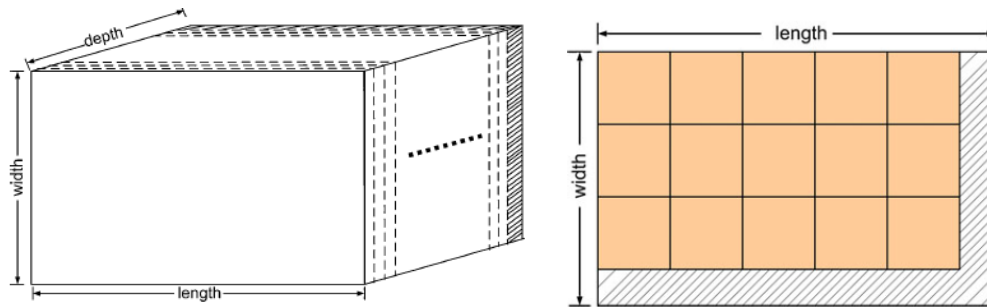


Figura 2.6: Exemplo de um padrão de corte de um bloco (esquerda) e de um plano (direita), imagens retiradas de Ozfirat (2012).



## Capítulo 3

# Aplicação ao problema da empresa

### 3.1 Estudo dos Dados

A F.Ramada vende diariamente peças de diferentes tipos de aços, com medidas variadas. Com o objetivo de encontrar a família de aço com maior importância na empresa fez-se um estudo, relacionando as diferentes famílias de aço com a quantidade de ordens de compra, quantidade de peças, e ainda, com o peso total das vendas, no ano de 2012. Os dados em análise referem-se, apenas, às peças com medidas irregulares, vendidas ao peso.

Conclui-se que o aço F10 é a família de aço com maior peso, em todas as vertentes, para a empresa. O gráfico da figura 3.1 mostra algumas características de cada cliente que efectuaram encomendas nesta família de aço, nomeadamente a quantidade de peças adquiridas, o seu peso e quantas encomendas distintas realizou.

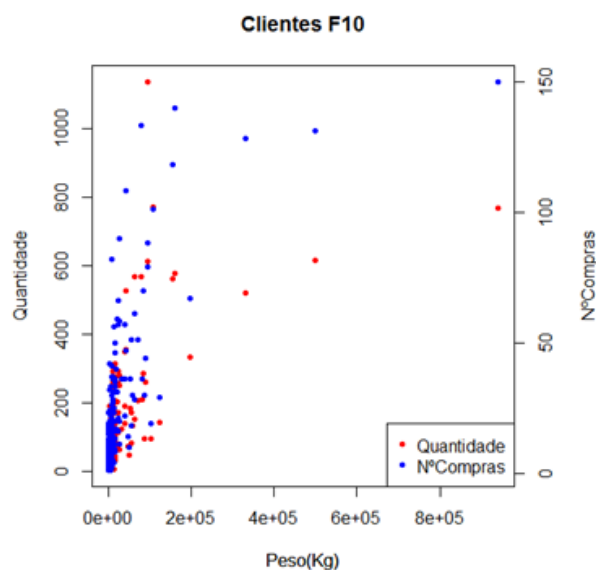


Figura 3.1: Quantidade, número de compras e peso dos clientes F10

Note-se que apesar da relação entre as três características estar presente apenas num gráfico, a quantidade de peças encomendadas e o número de ordens de compra estão representados em escalas diferentes. Cada par de pontos, azul e vermelho, na mesma linha vertical identifica um cliente. Por exemplo, os dois pontos mais distantes da origem significam que um cliente realizou 150 encomendas distintas, onde encomendou 768 peças que pesavam no total 940586 kg (máximo de peso encomendado por um cliente em 2012 em aço F10).

Podemos observar que os clientes que encomendaram poucas peças durante o ano de 2012 o fizeram em poucas encomendas. O peso dessas peças é bastante inferior ao peso máximo que foi encomendado. Para os restantes clientes não é simples retirar conclusões pois não possuem um padrão bem definido. Salienta-se apenas um cliente que apesar de não possuir um peso muito significativo e apenas 88 ordens de venda, representa a maior quantidade de peças compradas (1139 peças), isto indica que em média tanto o peso das peças adquiridas como a quantidade de peças encomendadas, em cada ocasião, são inferiores ao cliente mencionado anteriormente.

No que se segue usa-se apenas a informação recolhida sobre o Aço F10 no ano de 2012. De maneira a entender, de modo geral, as características das peças estuda-se as suas dimensões (espessura, largura e comprimento). Para cada uma das medidas é apresentado um boxplot e um histograma.

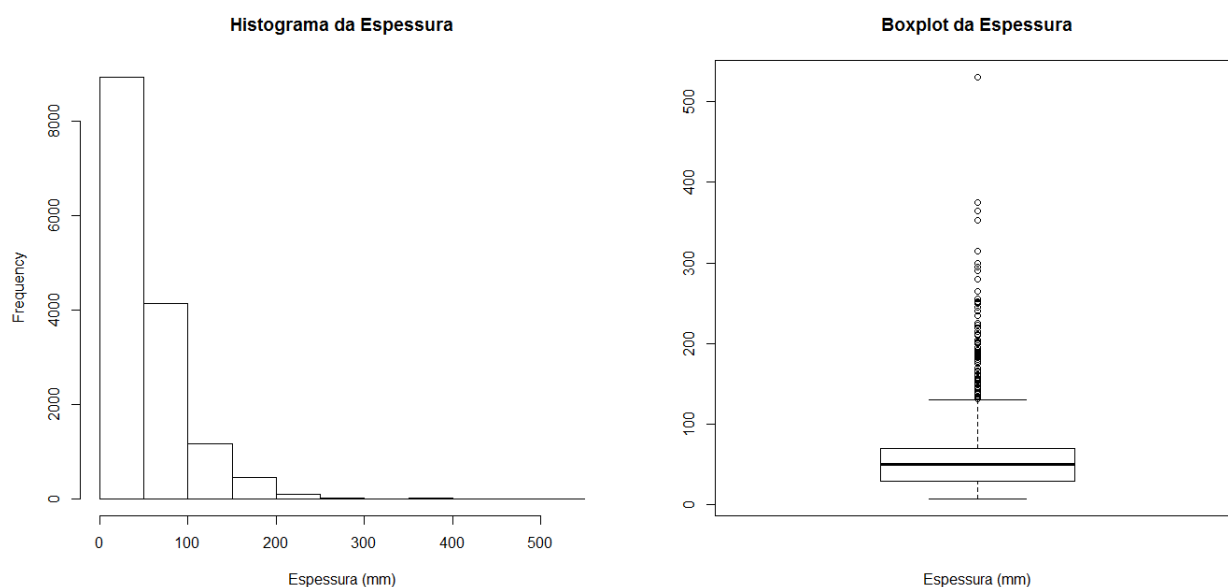


Figura 3.2: Histograma da espessura das peças vendidas em 2012 do Aço F10

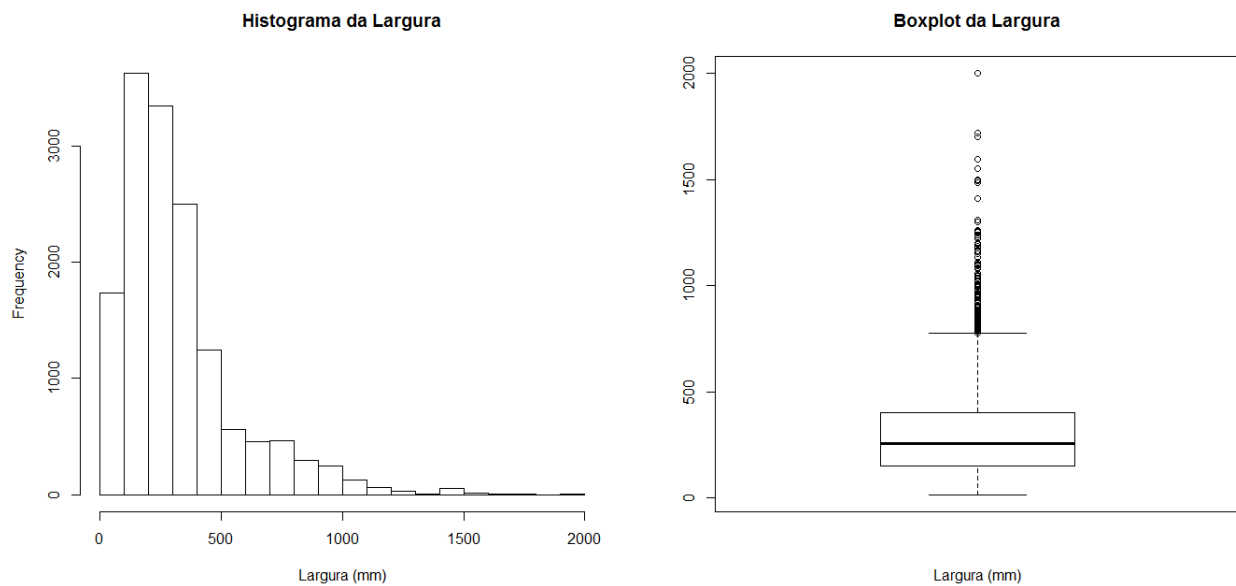


Figura 3.3: Histograma da largura das peças vendidas em 2012 do Aço F10

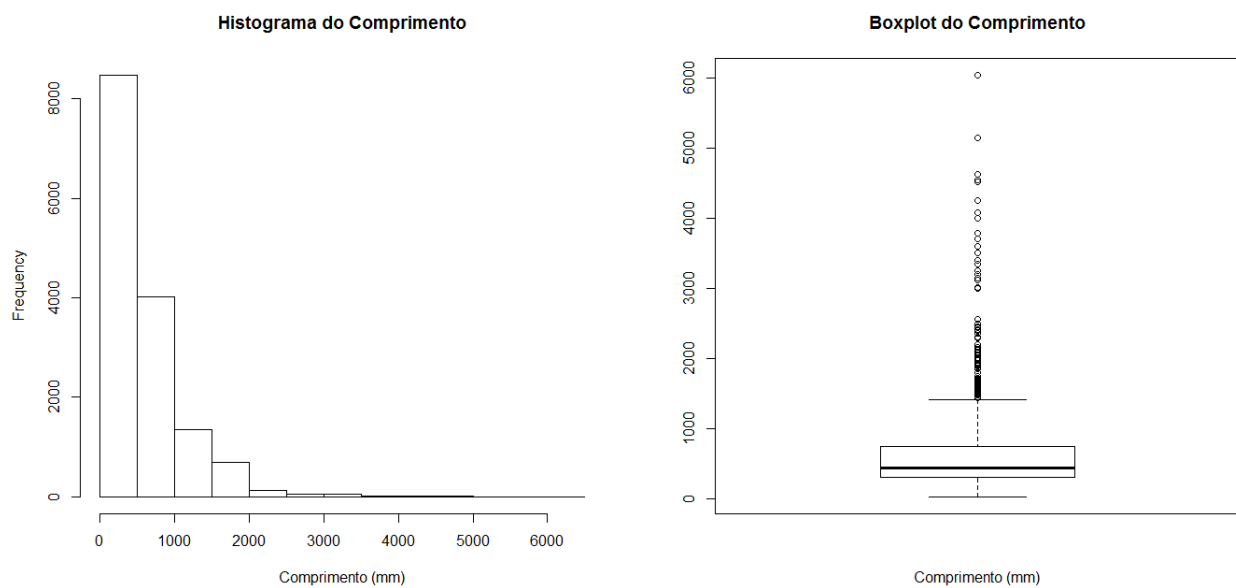


Figura 3.4: Histograma da comprimento das peças vendidas em 2012 do Aço F10

A partir dos gráficos das figuras 3.2, 3.3 e 3.4 verifica-se que existem bastantes *outliers* em todas as dimensões das peças. Embora esses *outliers* não tomem valores usuais, são observações tão importantes como as outras, portanto não se rejeitam, nem se diferenciam durante o estudo. Essas encomendas atípicas fazem parte da rotina da empresa.

O histograma da espessura e do comprimento mostram-nos que quanto maior a espessura menos peças existem com essas medidas. Enquanto nestas medidas a relação entre

a quantidade de peças e as medidas é praticamente monótona, na largura o decréscimo não é tão regular.

Apesar dos boxplots sugerirem que a diferença do maior *outlier* para o segundo esteja representado no boxplot da largura, ao tomar atenção à escala dos gráficos verifica-se que o comprimento é que tem a maior diferença (praticamente um metro).

De seguida apresenta-se uma tabela onde se encontra um resumo das medidas para cada dimensão (média, mínimo e máximo).

Tabela 3.1: Medidas das peças vendidas em 2012 do Aço F10

	Média	Mínimo	Máximo
<b>Espessura</b>	57,71 mm	8 mm	530 mm
<b>Largura</b>	321,4 mm	16 mm	2000 mm
<b>Comprimento</b>	610 mm	34 mm	6035 mm

Utiliza-se os dados do mês de junho de 2012, meramente porque não acarretam muitos problemas a nível computacional.

## 3.2 Aplicação Computacional

Numa primeira abordagem, pretende-se solucionar a primeira parte do problema proposto, isto é, saber quais os artigos mais adequados a encomendar. Para isso, utiliza-se o método de agrupamento anteriormente exposto, o K-Médias.

Apesar do *software* R possuir um comando que analisa os dados através do método em questão (*kmeans*), foi efectuada uma modificação ao algoritmo com finalidade de aproximar o método um pouco mais à realidade.

Inicialmente essa alteração consistiu na consideração dos seis tipos de posicionamento diferentes da peça ao longo do artigo. As seis possibilidades, arranjos possíveis com as 3 medidas, são esclarecidas pela seguinte figura:

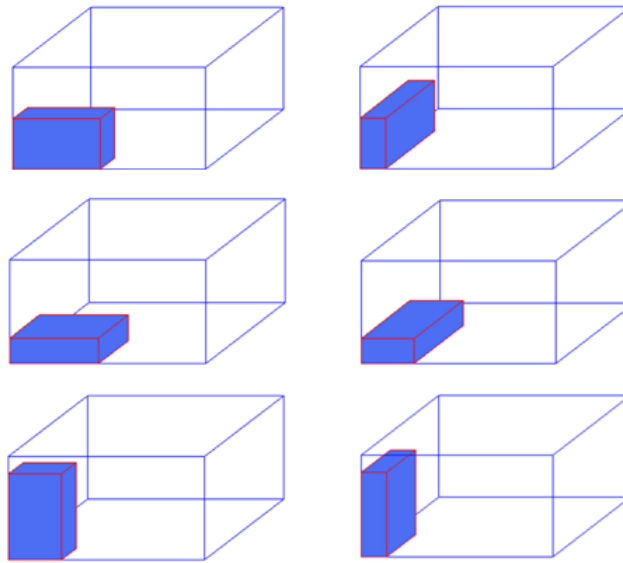


Figura 3.5: Posições possíveis ao longo do comprimento, largura e espessura

Mas, como não existiram alterações significativas nos resultados e o comprimento dos artigos comprados ao fornecedor não é uma escolha da empresa, neste estudo considera-se apenas dois posicionamentos distintos, a largura e a espessura. Todos os artigos têm comprimento compreendido entre 4000 e 6000 milímetros. Esse valor difere não pela vontade da empresa, mas pelo método de fabrico do artigo pelo fornecedor.

As diferentes perspectivas a considerar são:

- A espessura da encomenda ao longo da espessura do artigo, equivalentemente, a largura da encomenda ao longo da largura do artigo;
- A espessura da encomenda ao longo da largura do artigo, equivalentemente, a largura da encomenda ao longo da espessura do artigo.

Note-se que o problema que inicialmente era um problema tridimensional transforma-se num problema bidimensional.

A modificação realizada no método K-Médias consiste em alterar a distância euclidiana entre cada observação e o centro de cada agrupamento pelo mínimo das distâncias das diferentes perspectivas da peça encomendada ao longo da peça *standard* (duas perspectivas).

Deste modo, o algoritmo do K-Médias modificado será:

- 1 Escolher  $k$  centróides distintos, aleatoriamente;

- 2 Associar cada observação ao centróide mais próximo, considerando os dois diferentes posicionamentos;
- 3 Reorganizar os dados consoante as observações que alteraram o posicionamento da peça para atingir a menor distância possível a um centróide;
- 4 Recalcular o centro de cada grupo, através da média dos objectos que pertencem a cada classe (tem-se em atenção as alterações efectuadas no passo 3);
- 5 Repetir 2, 3 e 4 até não existirem alterações.

Utiliza-se o histórico de vendas do mês de junho de 2012 e assume-se que esse mês foi um mês com vendas típicas. Desta forma, ao estudar o que aconteceu no passado podemos ter uma ideia dos artigos mais indicados nas encomendas no futuro. Os dados, nesta fase do estudo, são as medidas (espessura e largura) e quantidades das peças da família de aço F10, nesse período.

A quantidade de peças representa quantas peças com as mesmas medidas o cliente encomendou numa compra. Essa característica não será utilizada como uma variável do estudo, será apenas para repetir as observações de modo a representar todas as peças vendidas, nesse ano, dessa família de aço, com medidas irregulares.

Esta implementação do Método K-Médias modificado resulta num output da seguinte estrutura:

- Dados e respectivas classes;
- Quantidade de peças em cada agrupamento;
- Centros de cada grupo;
- Erro Quadrático de cada agrupamento (SSE):  $\sum_{i=1}^n \text{dist}(x_i, \text{centro}_j)^2$ ;
- Soma dos Erros Quadráticos (SSB):  $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \text{dist}(x_i, \text{centro}_j)^2$ ;
- Soma dos Erros Quadráticos entre grupos:  $\sum_{j=1}^k C_j \text{dist}(\overline{\text{centros}}, \text{centro}_j)^2$ ;
- Erro Total: SSE + SSB;
- Observações que, na última iteração, alteraram de posicionamento;
- Número de iterações;
- Medidas mínimas e máximas de cada grupo;
- Gráfico bidimensional com divisão, através da cor, entre os diferentes agrupamentos.



Onde  $n$  representa o número de observações,  $k$  o número de agrupamentos,  $x$  é o conjunto de observações,  $\bar{c}$  os centros de cada agrupamento,  $\overline{\text{centros}}$  a média de todos os centros dos agrupamentos, e por último  $C_j$  representa a quantidade de observações no agrupamento  $j$ .

O problema que se pretende resolver é saber quais os artigos mais apropriados a comprar para satisfazer as vendas da empresa. Deste modo, o intuito deste algoritmo é agrupar as peças através das semelhanças das suas medidas. Realizam-se três processos diferentes para obter o número de agrupamentos indicado nos dados.

- 1) De forma pragmática aplica-se a seguinte equação (Regra de Ouro):  $k \simeq \sqrt{\frac{n}{2}}$ .
- 2) Através da Soma dos Erros Quadráticos verifica-se a partir de que número de agrupamentos este índice interno estabiliza.
- 3) Utiliza-se o número de agrupamentos igual ao número de diferentes artigos que a F.Ramada encomendou ao fornecedor nessa mesma época.

Efetua-se uma análise para cada processo, de seguida comparam-se os três métodos através do índice de Calinski, alcançando assim o número de agrupamentos que se deve aplicar ao histórico de vendas.

Considerando a equação da Regra de Ouro, obtém-se um valor de 22,3495. Desta forma, realiza-se o algoritmo com 22 e 23 agrupamentos. Obtém-se os seguintes resultados gráficos:

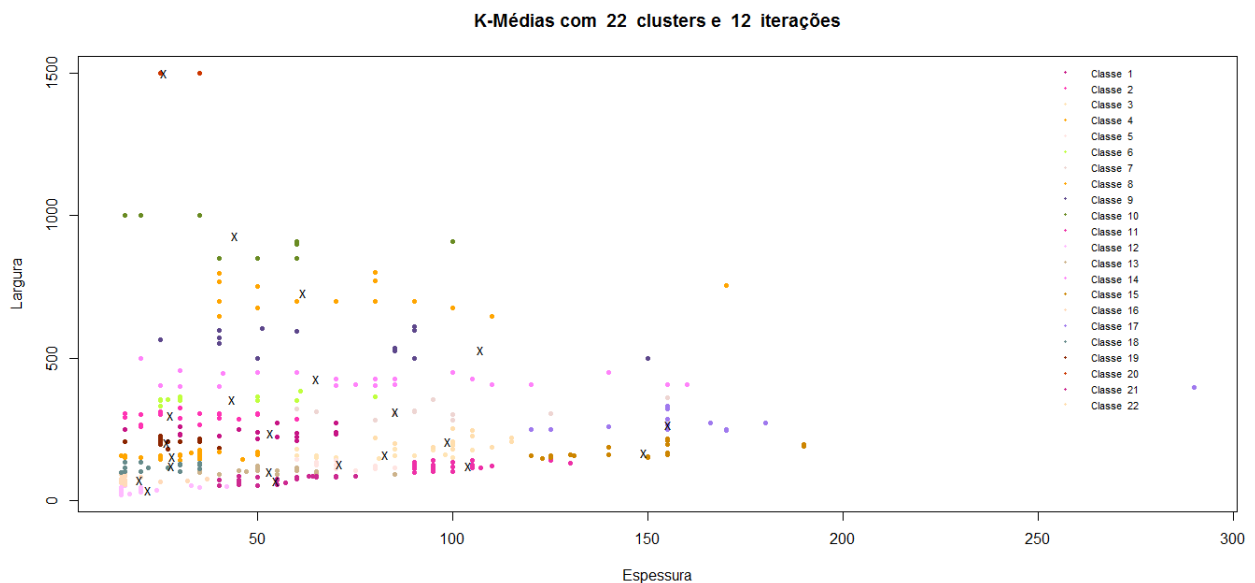


Figura 3.6: Peças agrupadas em 22 grupos

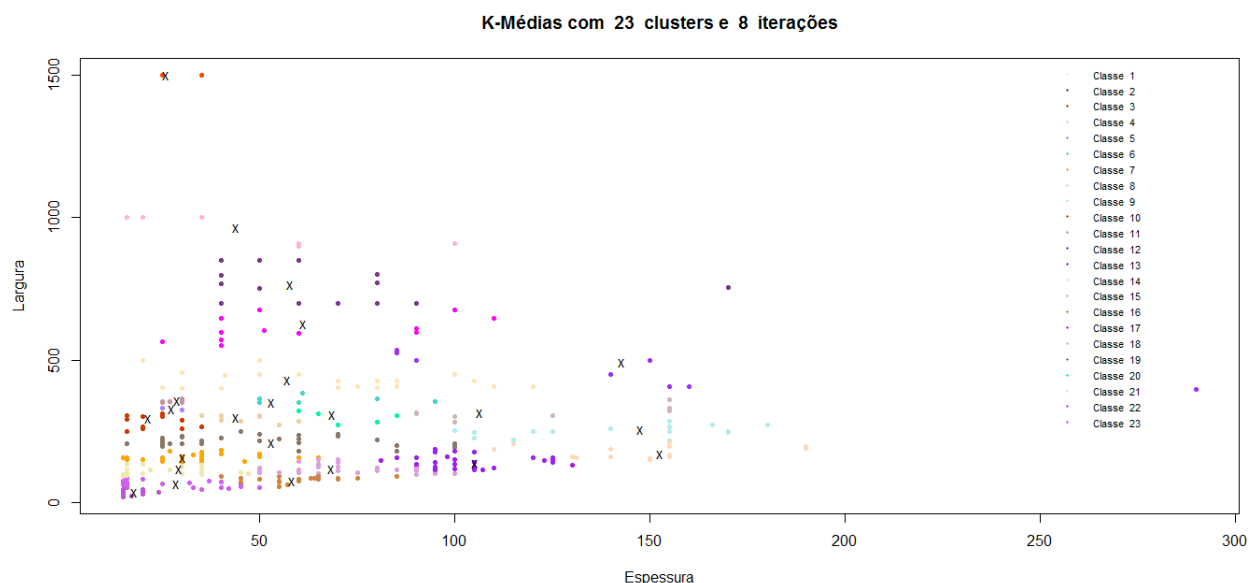


Figura 3.7: Peças agrupadas em 23 grupos

Nos gráficos das figuras 3.6 e 3.7 o centro de cada grupo está representado com um “x” enquanto o agrupamento das observações diferem consoante as cores.

Existe um centro que não altera de valor nos dois gráficos (26, 1500). Todas as peças existentes nesse agrupamento medem 1500 mm de largura. Graficamente parece que este grupo apenas contém duas observações, o que não representa a realidade. Este grupo contém 20 peças vendidas, mas apenas com dois tamanhos distintos e pelo gráfico é fácil verificar que existe maior quantidade da peça com menor espessura (25 mm), pois o centro está bastante próximo da observação.

Noutro caso prático, com os mesmos dados, existia a hipótese deste algoritmo não ser o mais adequado. Estatisticamente, nestes dados, existem *outliers* que não se consideram medidas atípicas pois representam a realidade da empresa. O Método K-Medóides é uma modificação do Método K-Médias que ameniza esta desvantagem do algoritmo em estudo.

Verifica-se que o algoritmo precisou de maior número de iterações para resolver o algoritmo para o caso do número de agrupamento igual a 22, que pode ser causado pelo facto dos centros iniciais serem escolhidos aleatoriamente. Outro aspecto que exhibe a sensibilidade do algoritmo aos centros iniciais, é a classe 5 (figura 3.7), com centro (27,5; 327,5) que apenas tem dois objetos, o que não voltou a acontecer quando se correu o algoritmo novamente, sendo a classe com menos objetos a classe referida anteriormente com largura igual a 1500 mm.

Procura-se saber qual o valor de  $k$  que a Soma dos Erros Quadráticos sugere. Para isso, constrói-se um gráfico que relaciona diferentes quantidades de agrupamentos com o respetivos valor da Soma dos Erros Quadráticos. O valor desejado de  $k$  será o valor

mínimo da Soma dos Erros Quadráticos, antes de o índice estabilizar.

Varia-se o número de agrupamentos entre 2 e 44 e analisa-se a evolução do índice da Soma dos Erros Quadráticos.

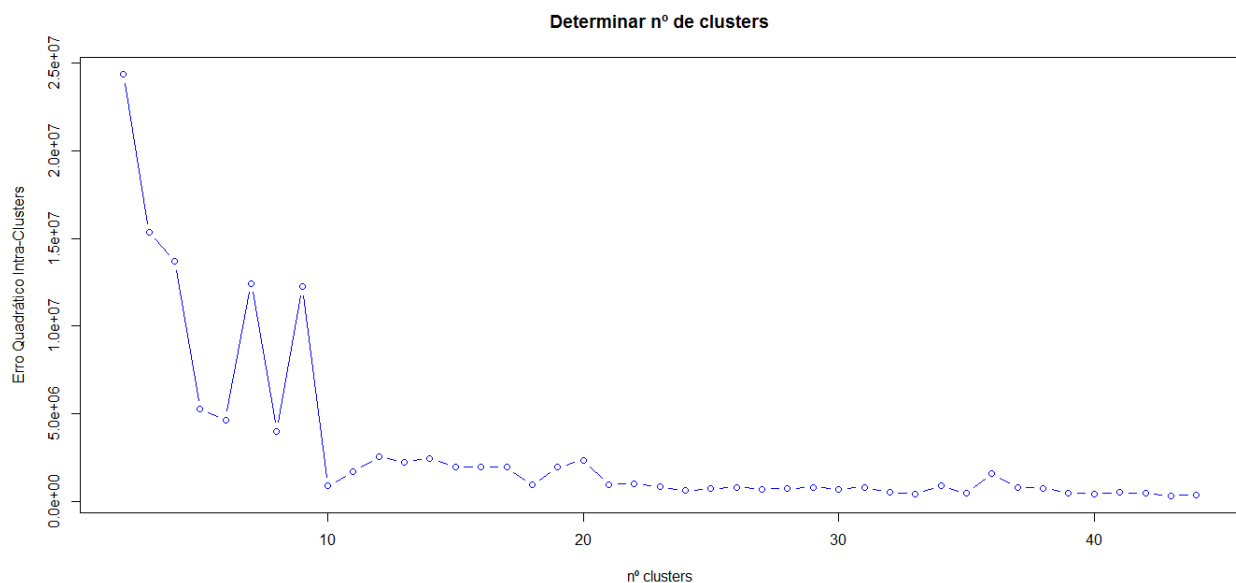


Figura 3.8: Número de agrupamentos vs Soma dos Erros Quadráticos

Como esperado, à medida que o número de agrupamentos aumenta o índice diminui. O índice toma o valor mínimo quando existirem tantos agrupamentos quanto observações distintas. Pretende-se encontrar um equilíbrio entre o erro e o número de agrupamentos. Desta forma, quando o índice estagnar obtém-se o número de agrupamentos desejado. Neste caso, o número de agrupamentos pretendido é 10. A análise deste gráfico é subjetiva, também é possível escolher o número de agrupamentos igual a 21, já que, a partir desse valor existe menos irregularidades. Usa-se o número de agrupamentos de valor 10 para se diferenciar um pouco dos valores anteriores.

Com  $k = 10$  obtém-se o gráfico da figura 3.9.

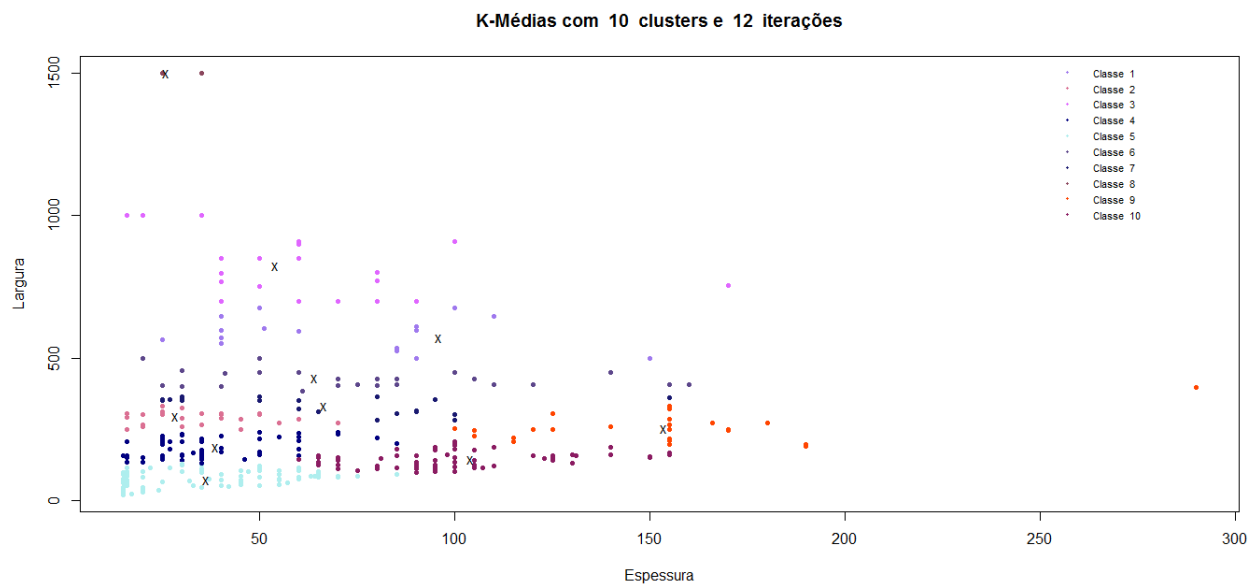


Figura 3.9: Peças agrupadas em 10 grupos

Repare-se que se volta a obter o mesmo agrupamento de objectos com largura igual a 1500 mm.

O algoritmo K-Médias tem como objetivo minimizar o Erro Quadrático, mas considerando a aleatoriedade dos centros iniciais, este método torna-se sensível a este primeiro passo do algoritmo. Para  $k = 10$  repete-se o algoritmo K-Médias 20 vezes, guardando os valores da Soma dos Erros Quadráticos.

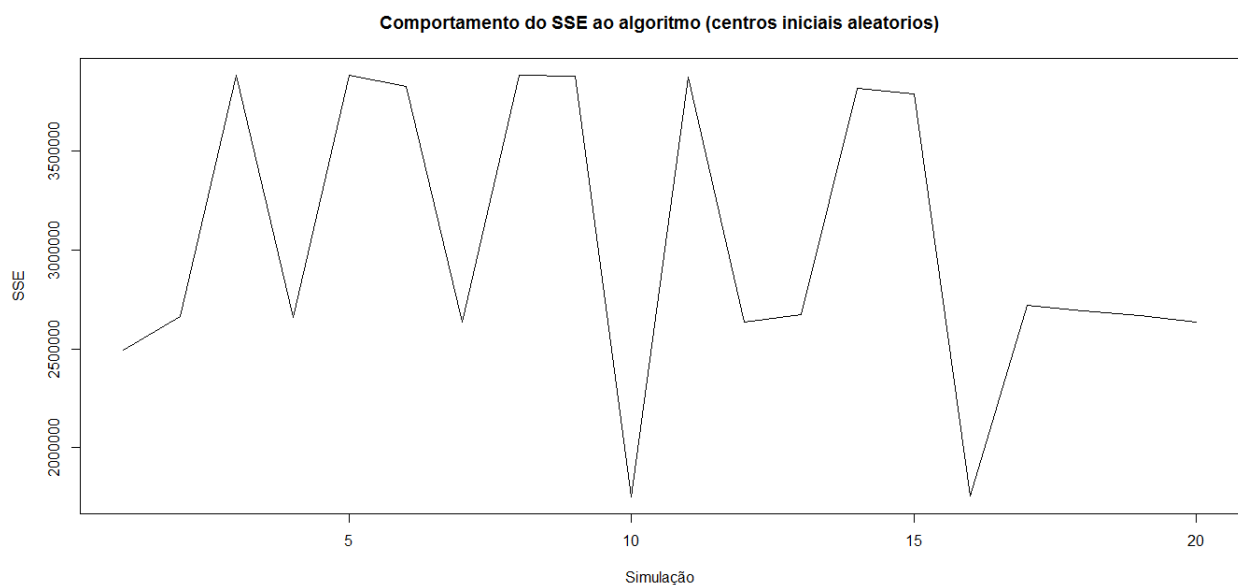


Figura 3.10: Soma dos Erros Quadráticos repetindo o algoritmo 20 vezes

Através do gráfico da figura 3.10 confirma-se que a escolha dos centros iniciais influencia bastante o resultado final dos agrupamentos das peças, visto que os Erros Quadráticos alteram significativamente para o mesmo número de agrupamentos.

Por último falta aplicar o algoritmo para  $k$  igual ao número de artigos com medidas distintas que a empresa encomendou no mês em análise, 31 artigos.

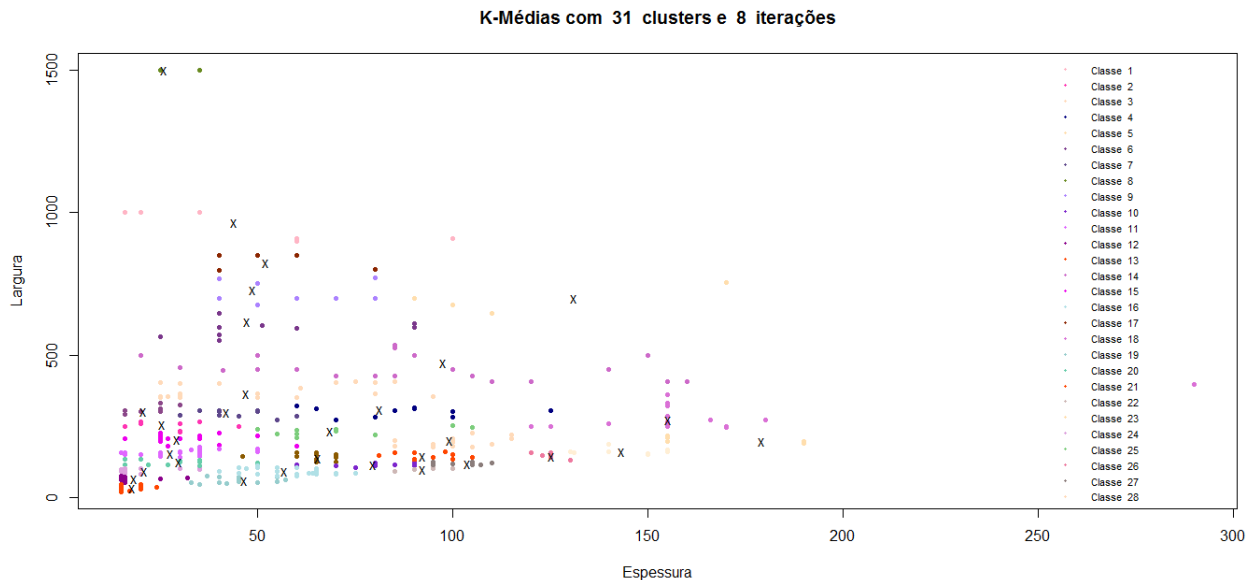


Figura 3.11: Peças agrupadas em 31 grupos

Com  $k=31$ , verifica-se que os centros de cada grupo estão mais próximos, já que, para a mesma quantidade de peças encomendadas existe maior número de grupos.

Realiza-se uma comparação entre os 4 números de agrupamentos de maneira a obter o valor mais indicado.

Tabela 3.2: Valores dos erros quadráticos para diferentes valores  $k$

Nº de agrupamentos	SSE	SSB	CH
10	2417855	75588353	0,284493
22	961482,7	77044725	1,722369
23	871674,9	77134532	1,994652
31	644251,8	77361956	3,721497

Através da tabela 3.2 verifica-se que as quatro variações do número de agrupamentos comportam-se de maneira previsível. A Soma dos Erros Quadráticos diminui consoante o aumento dos agrupamentos, isto é, à medida que o número de grupos aumenta as distâncias das observações aos centros correspondentes diminuem. A Soma dos Erros

Quadráticos entre grupos aumenta, pois quanto maior for o número de agrupamentos maior será a proximidade entre os grupos, sendo mais difícil os grupos apresentarem características dispares.

Pelo índice de Calinski afirma-se que o número de agrupamentos, que mais se adequa à F.Ramada, é 31 agrupamentos. Existe uma diferença significativa entre o índice quando o algoritmo adota 31 agrupamentos, para os restantes casos.

Falta identificar quais as medidas que o algoritmo sugeriu. Do output do algoritmo, com  $k=31$ , podemos retirar a informação da tabela 3.3.

Tabela 3.3: Medidas dos 31 artigos sugeridos pelo K-Médias

Agrupamento	Quantidade	Medidas Máximas das Peças		Medidas Artigos Sugeridos	
		Esp	Larg	Esp	Larg
13	42	24		45	24
30	79	30		330	30
12	31	32		73	32
8	20	35		1500	35
24	19	35		102	35
2	14	45		265	45
11	39	50		175	50
20	26	50		135	50
19	49	57		76	57
7	44	60		305	60
15	38	60		225	60
29	24	70		155	70
16	54	75		110	75
9	37	80		772	80
17	25	80		850	80
6	16	90		645	90
10	13	90		120	90
3	64	95		405	95
1	26	100		1000	100
22	7	100		105	100
21	17	105		160	105
25	19	105		253	105
27	22	110		125	110
28	34	115		225	115
4	59	125		320	125
26	15	130		155	130
31	28	155		185	155
14	46	160		535	160
5	10	170		755	170
23	13	190		215	190
18	69	290		395	290

A tabela está ordenada de modo crescente pela espessura. Apenas esta medida repre-

senta o artigo a comprar, pois nenhuma peça toma valores acima da largura mínima. Considerou-se que a espessura era indicada pelo máximo dessa medida em cada agrupamento e a largura, a largura mínima que um artigo com aquela espessura pode tomar.

A primeira coluna representa o número do agrupamento, a segunda a quantidade de peças que pertencem a esse agrupamento e na últimas duas a espessura e largura máxima de cada agrupamento. Deste modo obtém-se a lista de artigos a encomendar, para satisfazer uma encomenda semelhante à de junho de 2012. Na tabela 3.3, 17 dos artigos atingem os 90% da percentagem acumulada do peso ou quantidade de peças vendidas, com medidas compreendidas entre  $[EspArtigo-5mm, EspArtigo]$  (considera-se as tolerâncias de corte), no ano de 2012.

Encontrados os artigos que a empresa deverá comprar para satisfazer uma procura semelhante à procura do mês de junho de 2012, é necessário saber quantos artigos são necessários, ter em *stock*, para a procura ser satisfeita. Portanto, é necessário fazer uma gestão de *stocks*. Existe o objetivo de satisfazer os clientes, mas a empresa também tem o propósito de não empatar demasiado capital em *stock*.

Para além dos custos habituais relacionados com a gestão de inventários (custo de posse do *stock*, custo dos artigos, ...), a F.Ramada possui outros interesses relacionados com os artigos em *stock*. Esses surgem devido à personalização das peças vendidas. Deste modo, a empresa pretende não só fazer uma gestão de *stocks*, como também otimizar os desperdícios resultantes dos cortes das peças encomendadas pelos clientes.

Obtém-se, desta forma, dois objectivos distintos para otimizar:

- Minimizar os custos dos artigos encomendados;
- Minimizar os desperdícios resultantes dos artigos após o corte das peças encomendadas.

Nesta fase do estudo, apenas serão estudadas as encomendas que podem ser consideradas “grandes”. Entende-se por peças grandes, as peças que possuem no máximo uma medida entre 35% e 70% do total das medidas vendidas no mês de junho de 2012 e as restantes medidas superiores a esse intervalo.

As quatro encomendas grandes, em milímetros, que resultam desta descrição, são representadas na tabela 3.4.

As primeiras 3 colunas representam as medidas médias, as três seguintes, os desvios padrões respetivos e a última a quantidade de peças grandes encomendadas. Realiza-se apenas o problema de otimização considerando estas quatro encomendas pois, calcular todos os padrões de cortes com número de encomendas superior seria impraticável com

Tabela 3.4: Encomendas médias, desvios padrão e procuras no mês de junho de 2012

	Larg	Esp	Comp	DP Larg	DP Esp	DP Comp	Procura
<b>junho</b>	735	119	1562	159	31	205	<b>18</b>
	463	135	655	77	38	120	<b>37</b>
	703	45	1249	152	8	196	<b>57</b>
	238	151	1564	46	34	403	<b>57</b>

conhecimento até agora adquirido, e ainda, o elevado custo computacional imposto.

As encomendas dos clientes, não possuem sempre as mesmas medidas. Portanto, é necessário criar um intervalo para lidar com as incertezas das dimensões das peças. A este intervalo pertencem três quantidades:

- Quantidade de artigos necessários para satisfazer encomendas com medidas iguais à média menos o desvio padrão das medidas das peças grandes;
- Quantidade de artigos necessários para satisfazer encomendas com medidas iguais à média das medidas das peças grandes;
- Quantidade de artigos necessários para satisfazer encomendas com medidas iguais à média mais o desvio padrão das medidas das peças grandes.

Consideram-se apenas os artigos com maiores dimensões e larguras distintas, propostos pelo K-Médias, visto que só estudamos o caso das encomendas com medidas grandes. Os artigos considerados são:

- 170x1800x6000 (mm);
- 290x2000x6000 (mm).

Para resolver este problema multi-objetivos é necessário definir ambas as funções objetivo e as restrições necessárias.

Considera-se as encomendas com medidas médias mais o desvio padrão, após calcular os padrões de cortes e os desperdícios correspondentes, obtenho o seguinte problema de otimização de cortes.



$$\text{Minimizar} \quad 213,894b_1 + 312,426b_2 + 410,958b_3 + 67,32b_4 + 57,42b_5 + 173,42b_6 + 360,18b_7 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &+ 299,28b_8 + 289,42b_9 + 26,68b_{10} + 415,28b_{11} + 213,44b_{12} + 152,54b_{13} \\ &+ 91,64b_{14} + 405,42b_{15} + 142,68b_{16} + 81,78b_{17} + 329,44b_{18} + 268,54b_{19} \\ &+ 207,64b_{20} + 127,6b_{21} + 66,7b_{22} + 5,8b_{23} + 394,4b_{24} + 333,5b_{25} + 66,793p_1 \\ &+ 49,289p_2 + 550,951p_3 + 417,437p_4 + 107,398p_5 + 183,298p_6 + 232,299p_7 \end{aligned}$$

$$\text{Sujeito a} \quad 2p_1 + 2p_3 \geq 18 \quad (3.2)$$

$$7p_4 + 10p_5 \geq 57 \quad (3.3)$$

$$6p_2 + 10p_6 \geq 57 \quad (3.4)$$

$$3p_7 \geq 37 \quad (3.5)$$

$$p_1 - 3b_1 - 2b_2 - b_3 \leq 0 \quad (3.6)$$

$$p_3 - b_6 - 2b_9 - b_{10} - b_{11} - 3b_{15} - 2b_{16} - 2b_{17} - b_{18} - b_{19} - b_{20} \leq 0 \quad (3.7)$$

$$p_4 + p_5 - 3b_5 - 2b_6 - 2b_7 - 2b_8 - b_9 - b_{10} - b_{11} - b_{12} - b_{13} - b_{14} \leq 0 \quad (3.8)$$

$$p_2 - b_2 - 2b_3 - 4b_4 \leq 0 \quad (3.9)$$

$$p_6 - b_7 - b_{10} - 2b_{12} - b_{13} - b_{16} - 2b_{18} - b_{19} - 4b_{21} - 3b_{22} - 2b_{23} - b_{24} \leq 0 \quad (3.10)$$

$$p_7 - 2b_8 - b_{10} - 2b_{11} - b_{12} - 3b_{13} - 5b_{14} - b_{16} - 3b_{17} - b_{18} - 3b_{19} - 5b_{20} \quad (3.11)$$

$$-2b_{22} - 4b_{23} - 5b_{24} - 7b_{25} \leq 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 200 \quad (3.12)$$

$$b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17} + b_{18} \quad (3.13)$$

$$+ b_{19} + b_{20} + b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24} + b_{25} \leq 200$$

$$b_i \in \mathbb{N} \quad i \in \{1, 2, \dots, 25\} \quad (3.14)$$

$$p_j \in \mathbb{N} \quad j \in \{1, 2, \dots, 7\} \quad (3.15)$$

A unidade de medida dos desperdícios é o decímetro cúbico.

Ao contrário do que apresentado por Ozfirat (2012) o primeiro corte efetuado nos blocos é ao longo do comprimento. Desta forma, reduz-se o gasto de material, como a serra, para realizar os cortes necessários.

Todos os problemas de otimização são resolvidos com os custos reais das peças, mas sem qualquer alteração significativa dos resultados considera-se que o artigo com espessura menor custa 9746 euros e o restante 18474 euros. As restrições do problema de otimização dos custos dos artigos mantêm-se, pois pretende-se satisfazer a procura.

Modifica-se apenas a função objetivo, obtendo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & 9746 \times (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 18474 \times (b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} \\ & + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17} + b_{18} + b_{19} + b_{20} + b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24} + b_{25}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para transformar ambos os objetivos num problema de um só objetivo utiliza-se o Método do Peso. Como os objetivos possuem diferentes dimensões, e não é possível encontrar a relação entre elas, foi necessário retirar as duas dimensões. Aos coeficientes das variáveis de decisão do problema de otimização dos cortes dividiu-se pelo somatório de todos os

desperdícios, enquanto aos valores monetários do problema de otimização dos custos dividiu-se pela soma dos preços dos dois artigos em questão.

A utilização de custos fictícios pouco altera os coeficientes das variáveis de decisão após retirar as dimensões da função objetivo. O valor numérico resultante da fração entre o custo do artigo e do custo de ambos os artigos só modifica depois da quarta casa decimal.

O problema bi-objetivo, após aplicado o Método dos Pesos, formula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & (213,894b_1 + 312,426b_2 + 410,958b_3 + 67,32b_4 + 57,42b_5 + 173,42b_6 + 360,18b_7 + 299,28b_8 + 289,42b_9 + 26,68b_{10} + 415,28b_{11} + 213,44b_{12} + 152,54b_{13} + 91,64b_{14} \\
 & + 405,42b_{15} + 142,68b_{16} + 81,78b_{17} + 329,44b_{18} + 268,54b_{19} + 207,64b_{20} \\
 & + 127,6b_{21} + 66,7b_{22} + 5,8b_{23} + 394,4b_{24} + 333,5b_{25} + 66,793p_1 + 49,289p_2 \\
 & + 550,951p_3 + 417,437p_4 + 107,398p_5 + 183,298p_6 + 232,299p_7) \frac{\text{PesoCortes}}{7054,862} \\
 & + 0,3453 \times (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 0,6546 \times (b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} \\
 & + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17} + b_{18} + b_{19} + b_{20} + b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24} \\
 & + b_{25}) \times (1 - \text{PesoCortes}) \\
 \text{Sujeito a} \quad & 2p_1 + 2p_3 \geq 18 \quad (3.18) \\
 & 7p_4 + 10p_5 \geq 57 \quad (3.19) \\
 & 6p_2 + 10p_6 \geq 57 \quad (3.20) \\
 & 3p_7 \geq 37 \quad (3.21) \\
 & p_1 - 3b_1 - 2b_2 - b_3 \leq 0 \quad (3.22) \\
 & p_3 - b_6 - 2b_9 - b_{10} - b_{11} - 3b_{15} - 2b_{16} - 2b_{17} - b_{18} - b_{19} - b_{20} \leq 0 \quad (3.23) \\
 & p_4 + p_5 - 3b_5 - 2b_6 - 2b_7 - 2b_8 - b_9 - b_{10} - b_{11} - b_{12} - b_{13} - b_{14} \leq 0 \quad (3.24) \\
 & p_2 - b_2 - 2b_3 - 4b_4 \leq 0 \quad (3.25) \\
 & p_6 - b_7 - b_{10} - 2b_{12} - b_{13} - b_{16} - 2b_{18} - b_{19} - 4b_{21} - 3b_{22} - 2b_{23} - b_{24} \leq 0 \quad (3.26) \\
 & p_7 - 2b_8 - b_{10} - 2b_{11} - b_{12} - 3b_{13} - 5b_{14} - b_{16} - 3b_{17} - b_{18} - 3b_{19} - 5b_{20} \\
 & - 2b_{22} - 4b_{23} - 5b_{24} - 7b_{25} \leq 0 \quad (3.27) \\
 & b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 200 \quad (3.28) \\
 & b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + b_{16} + b_{17} + b_{18} \\
 & + b_{19} + b_{20} + b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24} + b_{25} \leq 200 \quad (3.29) \\
 & b_i \in \mathbb{N} \quad i \in \{1, 2, \dots, 25\} \quad (3.30) \\
 & p_j \in \mathbb{N} \quad j \in \{1, 2, \dots, 7\} \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Onde  $\text{PesoCortes}$  representa o peso que os cortes possuem na função objetivo do problema de um único objetivo. Como não se consegue quantificar a relação entre o custo dos artigos e os desperdícios dos artigos após os cortes, tem-se que o peso dos preços satisfaz a condição  $\text{PesoPreco} = 1 - \text{PesoCortes}$ .

Analogamente, constroem-se os problemas de otimização para os restantes casos.

Considera-se o peso dos cortes entre  $[0, 1]$  com incrementos de 0,1.

Todos os problemas foram otimizados através do solucionador do Excel. Outro *software* de otimização de problemas lineares ou não-lineares é o LINGO. Neste programa constroem-se problemas de otimização de maneira simples e intuitiva. Em anexo apresenta-se o problema de otimização do caso das medidas médias menos o desvio padrão resolvido através do LINGO. A utilização do Excel em vez do LINGO foi imposta pelo reduzido número de variáveis inteiras que o *software* permitia (50 variáveis inteiras). Existe ainda um *software* semelhante ao LINGO que resolve apenas problemas lineares, o LINDO. Este programa não permite a utilização de variáveis binárias, ao contrário do problema em Ozfirat (2012).

Após otimizar os 3 problemas (medidas médias, médias menos desvio padrão e médias mais o desvio padrão), com as diferentes possibilidades dos pesos, obtém-se os seguintes resultados das tabelas 3.5, 3.6 e 3.7. Todos os volumes são apresentados em decímetros cúbicos e os custos através da moeda europeia.

Tabela 3.5: Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias menos o desvio padrão

Peso		Valor ótimo	Nº Artigos		Custo	Desperdício	Excesso peças				Excesso de planos Art1				Excesso de planos Art2				Nº Padrões Diferentes		Sobra Total
Cortes	Preço		Art1	Art2			1ª	2ª	3ª	4ª	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4	Blocos	Planos	
0	1	1,65	1	2	46694	3154,82	6	3	0	23	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6	4106,48
0,1	0,9	1,51	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,2	0,8	1,36	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,3	0,7	1,22	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,4	0,6	1,07	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,5	0,5	0,93	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,6	0,4	0,78	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,7	0,3	0,63	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,8	0,2	0,49	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
0,9	0,1	0,34	1	2	46694	2448,37	0	3	0	3	0	1	0	3	0	1	0	0	3	5	4106,48
1	0	0,19	5	3	104152	2347,89	0	3	3	3	10	5	0	10	3	0	3	2	2	4	14309,88

Tabela 3.6: Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias

Peso		Valor ótimo	Nº Artigos	Custo	Desperdício	Excesso peças				Excesso de planos Art1				Excesso de planos Art2				Nº Padrões Diferentes		Sobra Total
Cortes	Preço		Art1	Art2		1ª	2ª	3ª	4ª	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4	Blocos	Planos	
0	1	2,65	2	3	74914	3628,62	0	2	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	4	7 4182,82
0,1	0,9	2,43	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	4	7 4218,35
0,2	0,8	2,20	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,3	0,7	1,98	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,4	0,6	1,75	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,5	0,5	1,53	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,6	0,4	1,30	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,7	0,3	1,08	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,8	0,2	0,85	2	3	74914	3607,95	0	3	3	3	0	0	0	1	0	0	0	0	5	7 4218,35
0,9	0,1	0,62	1	4	83642	2897,15	0	2	3	3	0	1	0	2	0	0	1	1	3	6 5234,69
1	0	0,36	1	7	139064	2894,83	0	2	3	3	0	1	0	2	1	8	1	7	3	6 15674,7

Nos três casos verifica-se que apesar do valor ótimo se alterar nos 33 problemas de otimização apenas existem 7 valores distintos do custo dos artigos necessários para satisfazer as encomendas. Quando as medidas das encomendas são diferentes da média

Tabela 3.7: Resultados da otimização múlti-objetivos considerando as medidas médias mais o desvio padrão

		I																		
Peso		Valor ótimo	Nº Artigos		Custo	Desperdício	Excesso peças				Excesso de planos Art1		Excesso de planos Art2				Nº Padrões Diferentes		Sobra Total	
Cortes	Preço		Art1	Art2			1ª	2ª	3ª	4ª	C1		C3	C1	C2	C3	C4	Blocos	Planos	
0	1	4,35	5	4	122626	6322,61	0	0	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,1	0,9	4,00	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,2	0,8	3,65	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,3	0,7	3,30	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,4	0,6	2,95	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,5	0,5	2,60	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,6	0,4	2,25	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,7	0,3	1,90	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,8	0,2	1,55	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
0,9	0,1	1,20	5	4	122626	6012,58	0	3	1	2	0		0	0	0	0	0	5	6	6532,9
1	0	0,81	6	6	169320	5739,98	0	3	3	2	0		2	0	0	8	3	4	4	15329

das encomendas grandes do mês de junho de 2012, nota-se que o custo dos artigos necessários para satisfazer as encomendas só alteram quando se dá plena importância aos desperdícios resultantes dos cortes. Se as medidas são iguais às médias, existe mais um custo distinto, quando o peso do preço é de 0,1. Isto significa, que, em cada caso, a quantidade de cada artigo a encomendar repete-se para pesos distintos.

Analisa-se dois tipos de sobras: as sobras que o problema utilizou para encontrar a solução do problema (desperdícios), e ainda, as sobras não só dos cortes, mas também da fração da peça não utilizada (sobra total). A sobra total é o somatório do volume de tudo o que não foi encomendado, ou seja, dos planos que não foram cortados, dos produtos finais que não foram vendidos e ainda, das sobras dos cortes. Apesar dos planos e produtos da sobra total, esta sobra é um dado importante nesta análise de gestão de *stock*. Quanto menos desperdício existir, mais aço existe para satisfazer as encomendas futuras. Mas não se ambiciona acumular demasiado *stock* em armazém, pois não se pretende empatar muito capital nesse *stock*. O melhor cenário seria aquele que tanto os desperdícios como a sobra total são nulas e o preço dos artigos o menor possível.

Verifica-se que, quando se pretende minimizar apenas o custo de encomenda, para a mesma quantidade de cada artigo o volume das sobras aumenta. Como com o peso do preço igual a 0,1 o problema obtém o mesmo valor para o custo e já se preocupa em minimizar também os cortes, exclui-se as soluções que minimizam somente os custos dos artigos encomendados ao fornecedor. A solução com o peso do preço igual à unidade não é considerada uma solução ótima de Pareto, pois é dominada pela solução seguinte.

Apesar de muitas soluções parecerem iguais, porque o volume das sobras e o custo dos artigos são os mesmos, isso nem sempre se verifica. No caso em que as medidas tomam os valores médios e o peso do corte é de 0,1, embora a quantidade de peças que excedeu a procura fosse igual aos problemas com pesos diferentes, e o valor de artigos e o volume de desperdícios iguais, nota-se que os cortes utilizados não são os mesmos. Este facto evidencia-se pelo número de padrões dos blocos distintos que se utiliza. Isto

também ocorre noutros problemas com pesos distintos, mas não são tão evidentes pois apenas alteram os padrões de corte, sem alteração dos outros parâmetros apresentados nas tabelas anteriores.

Resta, através de cada tabela encontrar o par dos pesos que relacionem da melhor maneira o valor e o volume das sobras dos artigos. Para o caso das medidas médias considera-se o vetor de pesos  $(0,9;0,1)$ , enquanto para os outros casos os pesos dos cortes estão compreendidos entre 0,1 e 0,9. Como dito anteriormente, não se considera o peso do custo igual a 1, pois apesar de resultar na mesma quantidade de artigos a comprar, os cortes não são os que originam menores desperdícios.

Escolhem-se esses pesos, pois as diferenças entre os desperdícios de pesos de soluções distintas não decrescem significativamente com o enorme aumento do preço total da encomenda. A sobra total não influenciou a decisão, devido aos custos de posse associados à permanência das sobras em armazém.

Após análise, conclui-se que se deve encomendar 1 a 5 artigos de dimensão  $170 \times 1800 \times 6000$  milímetros e 2 a 4 artigos de dimensão  $290 \times 2000 \times 6000$  milímetros, para satisfazer uma procura semelhante à do mês em estudo, considerando as incertezas das medidas das encomendas.



# Capítulo 4

## Conclusão

Este trabalho teve como objetivo conhecer quais e quantos os artigos a encomendar ao fornecedor para satisfazer as encomendas colocadas pelos clientes da F.Ramada.

Após averiguar a família de aços que é mais importante na F.Ramada, durante o ano de 2012 (AÇO F10), analisaram-se as semelhanças entre as vendas dos artigos com medidas personalizadas.

Através do algoritmo K-Médias agruparam-se as peças em vários grupos. Cada peça pertence ao grupo com as peças mais idênticas a ela própria, e cada grupo é o mais distinto possível dos outros grupos. Uma desvantagem deste algoritmo é a obrigatoriedade de definir o número de grupos *a priori*. Através de várias metodologias, obtém-se vários valores para o número de grupos que os dados devem possuir. Através do Índice de Calinski, verifica-se que o número de agrupamentos mais apropriado às observações é 31.

Os 31 agrupamentos originaram as espessuras de 31 barras. Essas medidas são as espessuras máximas de cada grupo, desta maneira, o artigo selecionado em cada grupo consegue satisfazer todas as encomendas do agrupamento. Dezassete dos artigos indicados pelo algoritmo pertencem a 90% da percentagem acumulada, em relação ao peso e/ou quantidades dos artigos com espessuras indicadas para satisfazer as peças encomendadas, considerando as tolerâncias de corte. Uma possível alteração ao algoritmo utilizado seria definir os centros de cada grupo como o máximo de cada agrupamento, em vez das suas médias. Deste modo, ao escolher os artigos a encomendar não seria necessário verificar quais as medidas máximas de cada grupo, bastava apenas saber quais os centros dos mesmos.

A metodologia realizada para encontrar uma solução ao problema proposto acarreta insatisfações, tais como, a aleatoriedade do algoritmo aos dados iniciais, e ainda, a necessidade de colocar como input o número de agrupamentos necessários. Apesar do valor dos centros de cada agrupamento ser influenciado, esta solução não tem em consideração a procura de cada peça com dimensões distintas. A informação retirada de cada grupo não é o valor de cada centro, mas o valor máximo que tanto a espessura como a largura podem tomar. A resolução não tem em atenção qualquer aspeto económico, como preço

da peça ou o número de cortes necessários para satisfazer a encomenda.

Na segunda fase do problema, o interesse é encontrar a quantidade de artigos que satisfaça as encomendas grandes do mês de junho. Pretende-se que a quantidade minimize os desperdícios causados pelos cortes, e ainda, o custo dos artigos. Construiu-se um problema de programação multi-objetivo que agrega ambos os problemas de otimização mencionados. Com o método dos pesos, quantifica-se a importância que cada factor, desperdício ou custo tem.

De forma a considerar as incertezas sobre as medidas de cada artigo, construíram-se três problemas multi-objetivo. Os três problemas diferem das medidas das peças: medidas médias, medidas médias menos o desvio padrão e medidas médias mais o desvio padrão. Deste modo, é possível indicar um intervalo de quantidades de artigos, tomando em consideração as irregularidades das medidas.

Após resolver os problemas multi-objetivo, com diferentes pesos, conclui-se que existem vários problemas que, apesar do valor ótimo da solução alterar, o desperdício e o custo dos artigos é o mesmo. Apenas no caso das medidas médias se verificou a existência de três custos e desperdícios distintos, nos outros casos apenas se verificaram dois. Para cada caso, exclui-se a solução que dá plena importância aos custos dos artigos, pois essa solução não é considerada ótimo de Pareto, uma vez que existem outras que minimizam os desperdícios sem aumentar os custos dos artigos.

Considera-se as quantidades escolhidas dos problemas que tomam como medidas as medidas médias mais ou menos o desvio padrão e sugere-se que se encomende ao fornecedor 1 a 5 artigos de dimensão  $170 \times 1800 \times 6000$  milímetros e 2 a 4 artigos de dimensão  $290 \times 2000 \times 6000$  milímetros.

Este problema foi resolvido com apenas quatro encomendas de medidas grandes, encontradas através da média de quatro grupos distintos, retirados dos dados das vendas de junho de 2012. Note-se que o problema foi muito simplificado pois apenas se consideram dois artigos que podem ser encomendados ao fornecedor.

O problema multi-objetivo não considera o *stock* existente, nem as sobras que são registadas como *stock*. Essas sobras têm custos associados (custo de posse), que podem alterar a decisão da quantidade a comprar. Para além dos custos de posse, o problema deveria considerar outros custos utilizados normalmente em problemas de gestão de *stock* como por exemplo, o custo de rutura. A empresa tem como principal objetivo satisfazer os clientes, desta forma, caso não exista um tipo de aço suficiente para satisfazer uma encomenda a F.Ramada utiliza um tipo de aço semelhante, mas de uma família de aço de melhor qualidade, o que requer maior custo.

Apesar do problema considerar as incertezas das medidas, uma aproximação à realidade deveria considerar, também, as incertezas da procura. De mês para mês, a procura apesar de não ser muito irregular tem algumas flutuações.



O problema utilizado para descrever os cortes dos blocos de aço não coincide com o quotidiano da empresa. Enquanto o problema utilizado corta as peças de uma só vez, no dia-a-dia da empresa, o artigo é selecionado, através de um algoritmo, sempre que existe uma encomenda. Esse algoritmo tem como parâmetros o peso, espessura, medidas iguais, número de sobras, entre outras.

Em todo o estudo não foram consideradas as tolerâncias de corte, nem os desaproveitamentos causados pelo corte da peça, isto é, aço que nem é considerado como peça, nem como sobras, nem como desperdícios.

A gestão de *stocks*, apesar de integrar equações simples, quando se pretende considerar um caso concreto, mais complexo, mostra algumas insuficiências. Neste estudo, o facto das medidas das peças encomendadas serem irregulares contribuiu para essa complexidade.



# Referências

- Bertsimas, D. and Thiele, A. (2006). A robust optimization approach to inventory theory. *Operations Research*, 54(1):150–168.
- Eiselt, H. A. and Sandblom, C.-L. (2007). *Linear Programming and its Applications*. Springer.
- Guerra, L., Robles, V., Bielza, C., and Larrañaga, P. (2012). A comparison of clustering quality indices using outliers and noise. *Intelligent Data Analysis*, 16(4):703–715.
- Ozfirat, P. M. (2012). An integer programming approach for the three-dimensional cutting planning problem of marble processing industry. *Advanced Manufacturing Technology*, 59:1057–1064.
- R Core Team (2012). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
- Tavares, L. V., Oliveira, R. C., Themido, I. H., and Correia, F. N. (1996). *Investigação Operacional*. Mcgraw-Hill de Portugal.



# **Anexos**



# Anexo A

## Problema resolvido em LINGO

! Função objetivo:

! desperdícios dos blocos do 1º artigo;

min = ((213.894\*b1 + 312.426\*b2 + 410.958\*b3 + 67.320\*b4

! desperdícios dos blocos do 2º artigo;

+ 57.420\*b5 + 173.420\*b6 + 360.180\*b7 + 299.280\*b8 + 289.420\*b9 + 26.680\*b10 + 415.280\*b11 +  
213.440\*b12 + 152.540\*b13 + 91.640\*b14 + 405.420\*b15 + 142.680\*b16 + 81.780\*b17 + 329.440\*b18 +  
268.540\*b19 + 207.640\*b20 + 127.600\*b21 + 66.700\*b22 + 5.800\*b23 + 394.400\*b24 + 333.500\*b25

! desperdícios dos planos cortados do 1º artigo;

+ 66.793\*p1 + 49.289\*p2

! desperdícios dos planos cortados do 2º artigo;

+ 550.951\*p3 + 417.437\*p4 + 107.398\*p5 + 183.298\*p6 + 232.299\*p7)

! retirar as dimensões (divido pelo somatório das sobras)e multiplico pelo peso dos cortes;  
/7054.862\*Peso\_Cortes)

! custo dos artigos;

+ ((9746\*(b1 + b2 + b3 + b4) + 18474\*(b5 + b6 + b7 + b8 + b9 + b10 + b11 + b12 + b13 + b14 + b15  
+ b16 + b17 + b18 + b19 + b20 + b21 + b22 + b23 + b24 + b25))

! retirar as dimensões (divido por 9746 + 18474) e multiplico pelo peso do preço;  
/36948\*(1-Peso.Cortes));

! Parâmetros:

Valor dos pesos para utilizar o Método dos Pesos

DATA:

Peso\_Cortes = ?;

! 1-Peso\_Cortes = Peso\_Custo\_Artigos;

ENDDATA

! Restrições:

Satisfação da procura de cada produto;

2\*p1 + 2\*p3 > 18;

7\*p4 + 10\*p5 > 57;

6\*p2 + 10\*p6 > 57;

3\*p7 > 37;

! Relação entre o corte dos planos e o corte dos blocos;

$p1 < 3*b1 + 2*b2 + b3;$   
 $p3 < b6 + 2*b9 + b10 + b11 + 3*b15 + 2*b16 + 2*b17 + b18 + b19 + b20;$   
 $p4 + p5 < 3*b5 + 2*b6 + 2*b7 + 2*b8 + b9 + b10 + b11 + b12 + b13 + b14;$   
 $p2 < b2 + 2*b3 + 4*b4;$   
 $p6 < b7 + b10 + 2*b12 + b13 + b16 + 2*b18 + b19 + 4*b21 + 3*b22 + 2*b23 + b24;$   
 $p7 < 2*b8 + b10 + 2*b11 + b12 + 3*b13 + 5*b14 + b16 + 3*b17 + b18 + 3*b19 + 5*b20 + 2*b22 + 4*b23 + 5*b24 + 7*b25;$

! Número de blocos não pode exceder o número de blocos disponíveis;

$b1 + b2 + b3 + b4 < 200;$   
 $b5 + b6 + b7 + b8 + b9 + b10 + b11 + b12 + b13 + b14 + b15 + b16 + b17 + b18 + b19 + b20 + b21 + b22 + b23 + b24 + b25 < 200;$

! Todas as variáveis representam quantidades inteiras;

@GIN(b1);  
 @GIN(b2);  
 @GIN(b3);  
 @GIN(b4);  
 @GIN(b5);  
 @GIN(b6);  
 @GIN(b7);  
 @GIN(b8);  
 @GIN(b9);  
 @GIN(b10);  
 @GIN(b11);  
 @GIN(b12);  
 @GIN(b13);  
 @GIN(b14);  
 @GIN(b15);  
 @GIN(b16);  
 @GIN(b17);  
 @GIN(b18);  
 @GIN(b19);  
 @GIN(b20);  
 @GIN(b21);  
 @GIN(b22);  
 @GIN(b23);  
 @GIN(b24);  
 @GIN(b25);  
 @GIN(p1);  
 @GIN(p2);  
 @GIN(p3);  
 @GIN(p4);  
 @GIN(p5);  
 @GIN(p6);  
 @GIN(p7);



Tabela A.1: Output do LINGO do problema bi-objetivos com peso dos cortes igual a 0.9

Global optimal solution found at step:	214
Objective value:	1.201.572
Branch count:	60

Variable	Value	Reduced Cost	Row	Slack or Surplus	Dual Price
B1	3.000.000	0.6182352E-01	1	1.201.572	0.0000000
B2	0.0000000	0.7439340E-01	2	0.0000000	0.0000000
B3	0.0000000	0.8696329E-01	3	3.000.000	0.0000000
B4	2.000.000	0.4312484E-01	4	1.000.000	0.0000000
B5	1.000.000	0.7278844E-01	5	2.000.000	0.0000000
B6	0.0000000	0.8758675E-01	6	0.0000000	0.0000000
B7	0.0000000	0.1114120	7	0.0000000	0.0000000
B8	0.0000000	0.1036429	8	0.0000000	0.0000000
B9	0.0000000	0.1023851	9	0.0000000	0.0000000
B10	0.0000000	0.6886689E-01	10	0.0000000	0.0000000
B11	0.0000000	0.1184412	11	0.0000000	0.0000000
B12	0.0000000	0.9269216E-01	12	1.950.000	0.0000000
B13	1.000.000	0.8492305E-01	13	1.960.000	0.0000000
B14	2.000.000	0.7715394E-01			
B15	0.0000000	0.1171834			
B16	0.0000000	0.8366520E-01			
B17	0.0000000	0.7589609E-01			
B18	0.0000000	0.1074905			
B19	0.0000000	0.9972136E-01			
B20	0.0000000	0.9195225E-01			
B21	0.0000000	0.8174142E-01			
B22	0.0000000	0.7397231E-01			
B23	0.0000000	0.6620320E-01			
B24	0.0000000	0.1157775			
B25	0.0000000	0.1080084			
P1	9.000.000	0.8520890E-02			
P2	8.000.000	0.6287876E-02			
P3	0.0000000	0.7028570E-01			
P4	0.0000000	0.5325310E-01			
P5	6.000.000	0.1370093E-01			
P6	1.000.000	0.2338362E-01			
P7	1.300.000	0.2963475E-01			
PESO_CORTES	0.9000000	0.0000000			